

Observatoire de Paris 2006

EFFETS GÉOPHYSIQUES SUR LA SUR LA ROTATION DE TERRE

par Christian BIZOUARD

avec la participation de Sébastien Lambert et Géraldine Bourda

Table des matières

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Systèmes de référence spatio-temporel | 4 |
| 1.1 | Définition de la rotation de la Terre | 4 |
| 1.2 | Système de référence terrestre | 4 |
| 1.3 | Système de référence céleste cinématique | 5 |
| 1.4 | Système de référence temporel | 8 |
| 2 | Description de la rotation terrestre | 9 |
| 2.1 | La rotation terrestre est irrégulière. | 9 |
| 2.2 | Principales fluctuations de la rotation terrestre. | 9 |
| 2.3 | Principe de la paramétrisation de la rotation terrestre et de sa mesure | 12 |
| 2.4 | Evolution des techniques. | 16 |
| 2.5 | Relations cinématiques | 18 |
| 3 | Fondement de l'étude dynamique de la rotation terrestre | 20 |
| 3.1 | Cadre newtonien de la rotation terrestre | 20 |
| 3.1.1 | Equations newtoniennes du mouvement de rotation | 20 |
| 3.2 | Equations d'Euler-Liouville | 21 |
| 3.2.1 | Equations d'Euler-Liouville | 21 |
| 3.2.2 | Solution générale pour un modèle de Terre rigide | 26 |
| 3.3 | Variations des paramètres d'orientation de la Terre | 29 |
| 4 | Effet de la non rigidité | 30 |
| 4.1 | Déformation centrifuge | 30 |
| 4.2 | Potentiel centrifuge | 31 |
| 4.3 | Figure moyenne de la Terre | 31 |
| 4.4 | Effet de l'élasticité sur les moments d'inertie | 33 |
| 4.5 | Influence de l'élasticité sur le mouvement du pôle | 35 |
| 4.6 | Influence de l'élasticité sur la longueur du jour | 36 |
| 4.7 | Anélasticité | 36 |
| 5 | Effet de l'atmosphère et des océans | 40 |
| 5.1 | Excitations géophysique | 40 |
| 5.2 | Nature du couplage entre une couche fluide et la Terre solide | 41 |
| 5.3 | Fonction d'excitation d'une couche fluide et moment cinétique de cette couche | 43 |
| 5.4 | Equation d'Euler-Liouville pour une Terre anélastique | 44 |
| 5.5 | Excitation atmosphérique | 45 |
| 5.5.1 | Influence des variations de pression atmosphérique. | 46 |

| | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.5.2 | Influence des vents | 47 |
| 5.6 | Excitation océanique | 49 |
| 5.6.1 | Modèle d'océan statique barométrique (IB) | 49 |
| 5.6.2 | Modèle d'océan dynamique | 51 |
| 5.6.3 | Ordre de grandeur du terme zonal du moment cinétique océanique . | 51 |
| 5.6.4 | Séries d'excitation océanique | 52 |
| 5.7 | Bilan des effets atmosphériques et océaniques sur l'orientation de la Terre . | 52 |
| 5.7.1 | Effets sur le mouvement du pôle | 52 |
| 5.7.2 | Effets sur la longueur du jour | 58 |
| Annexes | | 60 |
| A Décomposition du géopotentiel en harmonique sphérique - liens avec les moments d'inertie | | 63 |
| A.1 | Formulaire | 63 |
| A.2 | Démonstration abrégée | 65 |
| A.3 | Liens avec les moments d'inertie de la Terre | 67 |
| B Constantes usuelles | | 72 |
| Bibliographie | | 74 |

Chapitre 1

Systemes de référence spatio-temporel

1.1 Définition de la rotation de la Terre

La rotation de la Terre est définie comme la rotation de la croûte terrestre ou lithosphère par rapport aux étoiles. Les observations astrométriques et géodésiques révèlent que la croûte se déforme, et que les étoiles sont loin de constituer des balises inamovibles. Une rotation ne pouvant être considérée qu'entre deux systèmes d'axes rigides, la mesure précise de la rotation terrestre nécessite la définition et la construction préalable de deux systèmes de coordonnées cartésiennes, un *système de référence terrestre* et un *système de référence céleste*. Ce point est fondamental puisque notre connaissance de la rotation terrestre est d'autant plus fine que les références célestes et terrestres sont précises. Par exemple, si les points géodésiques du référentiel céleste sont connus seulement à 0,1" près, l'effet de la non rigidité de la Terre sur la nutation de l'axe de rotation demeurera voilé. La mesure de la rotation terrestre nécessite aussi une référence de temps plus stable que celle donnée par le cycle diurne.

Toutes ces raisons nous amènent à consacrer ce chapitre introductif aux systèmes de référence spatio-temporels.

1.2 Système de référence terrestre

Le système de référence terrestre, abrégé par SRT, est un système d'axes ($Gxyz$) participant à la rotation de la croûte terrestre et dans lequel le moment cinétique relatif de celle-ci est nul. Relativement à ce système, dit de "Tisserand", le champ des déplacements du manteau terrestre est irrotationnel, car s'il contenait une rotation son moment cinétique relatif serait non-nul ; autrement dit, il ne contient que des déformations pures. Cependant, un tel système est défini à une rotation constante près. Pour le définir précisément, il suffit de stipuler la position du pôle nord géographique à un moment donné et le méridien origine. C'est ce que l'on a fait en faisant coïncider le pôle nord géographique avec la position du pôle de rotation vers janvier 1900. Quant au méridien origine, c'est celui qui issu du pôle nord passe par Greenwich. Depuis, le pôle de rotation a dérivé de plusieurs mètres par rapport au pôle nord.

L'axe des pôles géographiques Gz est voisin de l'axe de figure, qui est l'axe de symétrie de l'ellipsoïde terrestre de référence. Cet ellipsoïde est une figure idéalisée d'une Terre

qui serait constituée de couches homogènes et ne subirait aucune déformation. Pour de longues échelles de temps, plus grandes que les périodes de convection dans le manteau il est concevable que les déformations terrestres s'annulent en moyenne, de sorte que la Terre prenne la forme de cet ellipsoïde de référence. L'axe de figure représente donc l'axe d'inertie *moyen* de la Terre. L'écart entre l'axe de figure et l'axe géographique Gz n'est pas rigoureusement constant : on observe que l'axe de figure dérive vers le Groenland avec une vitesse de $0.4''/\text{siècle}$, probablement à cause de la remontée des sols nordiques (Scandinavie-Russie) sous l'effet de la fonte des glaces arctiques (*rebond post-glacière*).

La réalisation pratique du SRT, le repère de référence terrestre ou RRT, est fondée sur un modèle géophysique du mouvement des plaques tectoniques et sur un ensemble de stations d'observations à la surface du globe. Les observations géodésiques permettent d'affiner le positionnement relatif des stations. Les coordonnées d'un groupe de points géodésiques, affranchis de leur mouvement de marée, "réalisent" le RRT. Ces coordonnées comprennent à la fois une position initiale à un instant donné t_0 et le déplacement tectonique (considéré comme linéaire en fonction du temps). Le RRT en usage réalise une condition de Tisserand assez grossière pour la lithosphère.

Le Service International de la Rotation de la Terre et des Systèmes de Référence (International Earth Rotation and Reference Frame Service) est chargé de réaliser et maintenir un tel repère, appelé "International Terrestrial Reference Frame" ou ITRF (tâche confiée à l'Institut Géographique National).

Dans la terminologie actuelle, on distingue les notions de *système de référence* et *repère de référence*. Le système de référence est un système d'axes défini par un concept, mais "désincarné" par opposition à sa réalisation pratique, le repère de référence.

1.3 Système de référence céleste cinématique

Le référentiel céleste est le fondement même de l'astronomie, car, sans lui, il n'y aurait pas moyen de relever les positions des astres et de cadre pour étudier leurs mouvements. Il en est non seulement le fondement, mais aussi, en quelque sorte le but, car n'est-il pas problème plus fondamental que de déterminer notre "place" dans l'univers, que de déterminer nos "marques" par rapport au Cosmos? Sans nul doute, la quête de la référence céleste absolue, celle qui constitue la réalité ultime du Cosmos, fut l'une des motivations principales de l'astronomie et de la physique jusqu'au XX^{ème} siècle, avant que la majorité des esprits ne se rallie à la conception acentrique et relativiste du monde formalisé par la théorie de la Relativité. Dès l'Antiquité se posa la question du référentiel auquel on devait rapporter les mouvements des planètes. Longtemps mise sous le boisseau par le géocentrisme aristotélicien, elle réapparaîtra au XVI^{ème} siècle, et se cristallisera dans les querelles passionnées du XVII^{ème} siècle opposants "héliocentristes" et "géocentristes".

Système de référence céleste cinématique. La manière la plus naturelle est de prendre comme référence les étoiles : les *directions relatives* de signaux électromagnétiques visibles ou non forment un "maillage", dont les noeuds fournissent des points de repérage pour les astres les avoisinant.

Jusqu'au XVII^{ème} siècle on considérait communément que les étoiles étaient attachées

solidement à une sphère, la sphère des fixes, dont le centre était la terre. C'était la référence absolue, répondant à l'idéal harmonieux de la philosophie grecque et au christocentrisme de la foi chrétienne. L'opinion héliocentrique, en soi, n'était pas dégagée du préjugé de la sphère des fixes. Copernic se contenta d'avancer que le centre de la sphère des fixes n'était pas la Terre mais le soleil. La découverte du mouvement propre des étoiles au XVIIIème siècle battut définitivement en brèche cette conception. La référence absolue se défilait. Cependant, les relevés des positions des étoiles se faisaient toujours plus précis. Au cours du XVIIème siècle, l'introduction des instruments d'optique, révolutionnait l'astrométrie, puisque la précision du pointé, exclusivement visuel jusqu'à cette époque, passait de 2' à moins d'une seconde de degré. On escomptait percer certains mystères, comme celui de la distance des étoiles qui maintenait en haleine les astronomes. Ainsi, au fur et à mesure que la référence des étoiles "fixes" perdait son caractère absolu, son intérêt pratique croissait. Pour mesurer le mouvement des planètes, chercher les parallaxes, déceler les variations de la rotation terrestre, il fallait des catalogues d'étoiles donnant leur déclinaison et leur ascension droite toujours plus fournis et précis. Le mouvement propre en soi n'est pas un obstacle fondamental, pourvu qu'il soit connu. La connaissance des coordonnées sphériques des astres à une époque donnée, et de leur mouvement propre le cas échéant, est suffisant pour fournir un maillage de référence à la date d'observation. Vers 1740 Bradley découvrit un curieux mouvement annuel qui affectait systématiquement les étoiles, l'aberration, et dont on pouvait rendre compte par la composition de la vitesse de la lumière avec la vitesse orbitale de la Terre. En 1830 Bessel mettait en évidence la première parallaxe annuelle. Il apparaissait donc que dans le système géocentrique les étoiles sont affectées de mouvements systématiques associés à l'orbite annuelle. Celui-ci n'était plus le cadre adéquat pour coordonner les étoiles. Il devenait évident que les positions apparentes des étoiles devaient être données dans un système héliocentrique où parallaxe et aberration annuelles s'évanouissent. Quite à ce que ces perturbations soient calculées et prises en compte au moment de l'observation faite au sol.

Au début du XIXème siècle, alors qu'on a abandonné toute illusion quant à la nature absolue du repère des étoiles, on met en évidence la nature ondulatoire de la lumière, et par la même, tout au moins le croit-on, l'existence de son milieu de propagation, "l'éther luminifère". Cet éther, c'est un nouvel avatar dans la recherche du repère absolu. La question centrale devient : quelle est la mouvement de la Terre dans ce milieu ? La lumière présentant une vitesse uniforme dans l'éther, sa vitesse est changée par rapport à tout objet s'y mouvant. On réalisera toutes sortes d'expériences optiques pour déceler le fameux "vent d'éther" dans la vitesse de la lumière. La plus fameuse est l'expérience de Michelson et Morley (1887). Mais aucune d'entre elle ne démontrera un quelconque effet du mouvement orbital ou de la vitesse cosmique de la Terre. La parenthèse de l'éther s'est refermé avec la théorie de la Relativité, d'après laquelle la vitesse de la lumière est invariable d'un référentiel à l'autre.

Depuis le XVIIIème siècle de nombreux catalogues d'étoiles ont vu le jour, le dernier en date étant celui réalisé grâce aux observations du satellite Hipparcos vers 1990. Cependant, à partir de 1970, la technique de la radio interférométrie à très longue base, a mis un terme au règne sans partage des étoiles : alors que leur pointé optique est restreint par la turbulence atmosphérique, la radio interférométrie évite un tel écueil et les radio sources extragalactiques (quasars, QSO) sont positionnées avec une précision inégalée,

confinant la milliseconde de degré. En 1997 l'Union Astronomique Internationale (IAU) a consacré le repère des radiosources extragalactiques au rang de repère de référence céleste international (ICRF, International Celestial Reference Frame). Il consiste dans la donnée des coordonnées cartésiennes de quelques centaines de radio sources extragalactiques dont les mouvements angulaires relatifs n'excèdent pas 10^{-6} "/an. Bien entendu le choix du plan fondamental est conventionnel. L'erreur angulaire dont sont entâchés les points de référence est de l'ordre de 0,0005".

Tous ces systèmes ou repères ont ceci en commun, qu'ils sont fondés sur des objets célestes. Comme ils ne font intervenir aucune théorie physique, et sont entièrement déterminés par les positions, éventuellement les mouvements relatifs de ces objets, on les nomme systèmes ou repères cinématiques.

Système de référence céleste dynamique. Notre présentation des systèmes de référence céleste serait tout à fait incomplète si nous faisons l'impasse sur les développements de la mécanique à partir du XVIIème siècle. Les philosophes scolastiques s'étaient longtemps interrogés sur la cause qui préside à la conservation du mouvement des corps. Suite aux travaux de Galilée et Descartes, la science devenant expérimentale et opérative et prenant ses distances avec la métaphysique et la théologie, les savants devinrent plus intéressés par le "comment" que par le "pourquoi". Ils réussirent à dégager des lois générales du mouvement, dont la synthèse définitive fut faite par Newton. La première de ces lois, c'est celle du *principe de l'inertie*, formulé par Galilée et Descartes : "tout corps auquel on a imprimé un mouvement a tendance à le poursuivre de façon rectiligne et à vitesse uniforme". Newton va alors préciser : "à la condition qu'il ne soit soumis à aucune force", et du même coup définit la force comme "étant la cause du changement de l'intensité du mouvement". L'expérience lui montrant qu'un corps X fois plus lourd est accéléré X fois moins par le même effort, il pose que la force est le produit de la masse par l'accélération subie par ce corps. C'est la célèbre relation fondamentale de la dynamique. La question qui se pose alors, c'est de savoir par rapport à quelle référence matérielle ces lois doivent être formulées. La réponse, empirique, c'est que ce système de référence n'est pas accessible, mais qu'il peut être réalisé approximativement. En première approximation c'est le laboratoire, mais pour peu qu'on s'intéresse à des mouvements à plus grande échelle faisant intervenir des accélérations toujours plus faibles, il faudra prendre successivement le système géocentrique non tournant, le système héliocentrique, le système galactocentrique, etc..

Ce référentiel abosolu newtonien, mythique, semble s'incriner en porte à faux, car dans l'univers observable, tous les corps présentent des mouvements en accélération relative. Alors comment imaginer qu'il y ait un corps ou des corps en parfait mouvement uniforme ou au repos absolu? La découverte de la rotation galactique à 300 km/s a détroné le barycentre des masses du système solaire en tant qu'origine possible du système inertiel. Alors devons-nous positionner l'origine au centre de la galaxie? Mais celle-ci n'accélère t-elle vers l'amas galactique de Virgo? Bref, le problème, sous l'angle newtonien, prend l'apparence d'une visse dans fin.

En théorie de la Relativité Générale on tranche ce noeud gordien en rejetant l'idée qu'il existe un repère absolument au repos dans lequel les lois de Newton soient rigoureusement suivies. Le caractère inertiel est local et s'applique à tout corps soumis à la seule gravitation (en chute libre). Ainsi le repère géocentrique non tournant, considéré au voisinage du

centre de la Terre, est-il tout aussi inertiel que le référentiel héliocentrique.

Le caractère inaccessible du système inertiel newtonien ne doit pas masquer ses réalisations approximatives, ou *repères dynamiques* caractérisant un référentiel inertiel local. La plus connue, c'est le référentiel barycentrique, dont l'origine coïncide avec le barycentre des masses du système solaire. En effet l'application de la loi de la gravitation universelle permet de décrire fidèlement la trajectoire des planètes et du soleil dans ce référentiel, malgré quelques légères entorses résolues par la Relativité Générale. Ces trajectoires réalisent un repérage pour tout autre objet. Par exemple, si nous observons telle ou telle comète à proximité de Jupiter, nous sommes en mesure, via la connaissance de la trajectoire barycentrique de Jupiter, de la positionner dans le système barycentrique. Une deuxième réalisation, beaucoup plus récente, c'est le référentiel matérialisé par les orbites géocentriques de satellites artificiels, tel que les satellites GPS.

Il existe une autre manière d'accéder aux repères inertiels locaux, sans passer par le truchement de la mécanique newtonienne et de la loi de la gravitation universelle : ce sont les gyroscopes mécaniques, les gyro-laser, les gyroscopes à atomes froids, qui permettent de mesurer les accélérations d'un système mécanique, comme la rotation instantanée de la Terre par rapport au repère inertiel local.

1.4 Système de référence temporel

Les déterminations actuelles de la rotation de la Terre sont déduites de mesures de temps extrêmement fines. De plus les fluctuations dans la vitesse de rotation ne furent mesurées qu'à partir du moment où l'on sut réaliser des échelles de temps plus stable que celle découlant de la succession des jours solaires. La référence de temps joue donc un rôle tout aussi fondamental que les références spatiales.

Jusqu'en 1972 la succession des jours solaires moyens constituait l'échelle de temps de référence civile, le Temps Universel ou TU. Cependant, dès les années 1930 des irrégularités saisonnières furent décelées entre le TU et les horloges à quartz qui venaient d'être mises au point. Certaines observations des planètes et de la Lune avaient déjà mis en évidence que TU n'avait pas une marche aussi uniforme que le temps associé à la marche de ces astres, ou Temps des Ephémérides, TE. L'échelle de temps TE n'est ni plus ni moins que la réalisation pratique du "temps newtonien absolu", intervenant dans les équations différentielles newtoniennes du mouvement des planètes.

Aujourd'hui le temps de référence est "fabriqué" à partir d'horloges atomiques réparties sur tout le globe, dont celle de l'Observatoire de Paris : c'est le Temps Atomique International, TAI, dont l'unité de temps étalon, la seconde TAI, s'accumule depuis le 1er janvier 1958. Du fait du ralentissement de la rotation terrestre, la seconde TU, c'est-à-dire la 86400ème partie du jour solaire moyen augmente en moyenne de 1,6 ms par siècle (en faisant abstraction des irrégularités à plus court terme de la longueur du jour qui atteignent 5 milliseconde sur 70 ans). La seconde TAI a été choisie comme la 86400ème partie du jour solaire moyen des années 1820. Il en résulte que le TAI bat légèrement plus vite que le TU, et présente donc un excès croissant par rapport à ce dernier, croissance s'accroissant avec l'augmentation séculaire de la seconde de TU causée par le ralentissement de la rotation terrestre.

Chapitre 2

Description de la rotation terrestre

2.1 La rotation terrestre est irrégulière.

Aujourd'hui l'orientation du trièdre terrestre par rapport au trièdre céleste est déterminé à 0,2 milliseconde de degré près (nous préférons par la suite le terme anglo-saxon milliarcseconde, abrégé par "mas" ; une milliarcseconde est l'angle sous lequel on verrait un arc de 3 cm à la surface de la Terre au centre de celle-ci, à 6371 km de distance ; noter qu'en 1 ms, un méridien terrestre balaie en moyenne $7,29911510^{-8}$ radians soit 15,0415 mas). Cette précision inégalée de 0,2 mas est due aux techniques astro-géodésiques développées depuis une trentaine d'année : radio-interférométrie à très longue base (Very Long Baseline Interferometry, VLBI) , laser satellite (Satellite Laser Ranging, SLR), et plus récemment les systèmes de positionnement global par satellite (le GPS américain, le GLONASS russe, et bientôt le GALILEO européen). A titre de comparaison les techniques purement astrométriques, basée sur le relevée de la position des étoiles, donnent une précision de l'ordre de 50 mas tout au plus.

En l'absence de perturbation interne ou externe, la Terre tournerait uniformément en 23h56min4.10s autour d'un axe invariable dans l'espace, faisant un angle de $23^{\circ}26'$ avec le pôle de l'écliptique. Le sujet serait vite balayé. En fait la rotation de la Terre présente des fluctuations dont il s'agit de discerner les causes à la fois de nature astronomique et géophysique. Nous allons décrire sommairement ces irrégularités dans une perspective historique. La chronologie de leurs découvertes reflète aussi les progrès des techniques de mesures astrométriques et géodésiques. Dans un deuxième temps nous allons voir comment ces variations sont mesurées, et quelle paramétrisation est utilisée à cette fin.

2.2 Principales fluctuations de la rotation terrestre.

La précession. La première irrégularité fut mise en évidence dès l'Antiquité par l'astronome Grec Hipparche vers -200 avant J.C : le point vernal ou la direction du soleil au printemps (le noeud descendant du plan équatorial sur le plan de l'écliptique) est animé d'un mouvement de rétrogradation sur le plan de l'écliptique, ou *précession* par rapport aux étoiles (il tourne dans le sens indirect dans le repère écliptique orienté par le pôle écliptique nord). Autrement dit le plan équatorial tourne dans le sens des aiguilles d'une montre avec l'inclinaison constante $23^{\circ}26'$ (obliquité) par rapport à l'écliptique (voir Fig.2.1). La vitesse angulaire est de l'ordre 50" par an, et le point vernal accomplit donc

un tour complet sur le zodiac en 25800 ans. A l'heure actuelle le point vernal se trouve dans la constellation des Poissons (Pisces), et s'approche de la constellation des Verseaux (Aquarius) (voir Fig.2.1).

L'axe de rotation diurne est perpendiculaire au plan équatorial. A cause de la précession, l'axe décrit un cône autour de l'axe des pôles de l'écliptique en 25800 ans. A l'heure actuelle l'axe de rotation pointe vers l'étoile polaire, mais dans 13000 ans il pointera en direction de Vega (voir Fig.2.1).

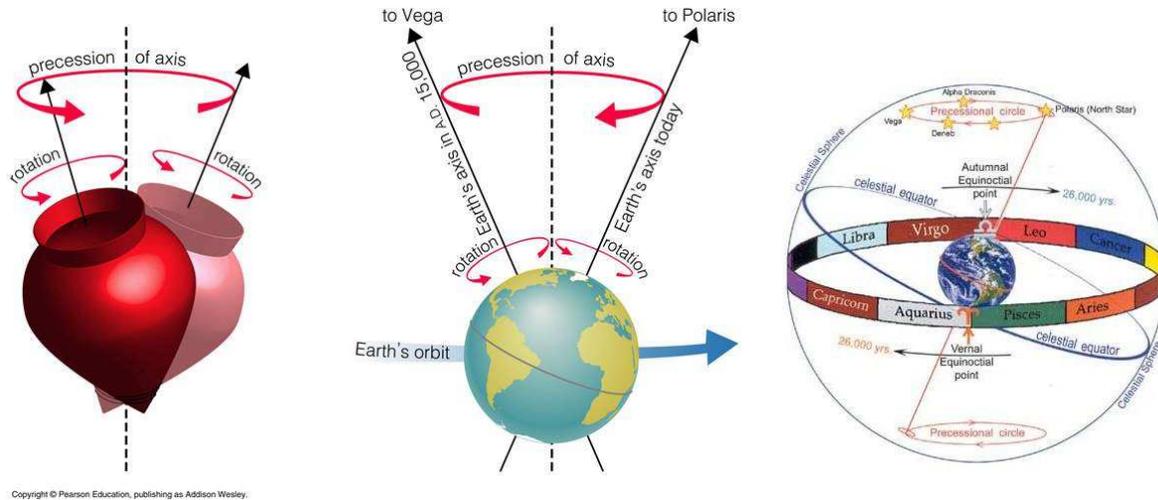


FIG. 2.1 – A gauche : précession de l'axe de rotation (P) autour du pôle de l'écliptique (K). A droite : précession du point vernal sur le zodiac.

Nutation. A la précession viennent se superposer des oscillations périodiques de l'axe de rotation, les nutations prédites dans les *Principia Mathematica* de Newton. Ces oscillations périodiques sont de plus faibles amplitudes, en deçà de 1'. C'est pourquoi leur découverte nécessita l'avènement des télescope et lunettes. En 1748, l'astronome anglais Bradley découvre la nutation principale, en 18,6 ans, de l'ordre de 10", et associée à la rotation du plan orbital lunaire avec cette période. Les autres termes, quelques milliers dans le modèle de référence actuel, sont au moins 10 fois plus petits.

La cause de la précession-nutation est l'action des forces gravitationnelles luni-solaire sur le bouelet équatorial de la Terre. A partir des années 1970, les observations astrométriques ont mis en évidence le fait que les nutations n'étaient pas tout à fait celles d'une Terre rigide. Avec la prise en compte de la structure interne de la Terre et de ses propriétés rhéologiques, les modèles actuels permettent une description très fine, à moins d'un mas près.

Mouvement du pôle. Euler démontra théoriquement en 1765 que, dans un ellipsoïde de révolution homogène en rotation, l'axe de rotation, quand il n'est pas confondu avec l'un des axes principaux d'inertie, est animé d'une oscillation libre périodique dont la fréquence croît avec l'ellipticité. La Terre épousant la forme d'un tel ellipsoïde, on calcule que son axe de rotation peut osciller librement avec une période de 305 jours. L'astronome américain Chandler accomplit un pas décisif en découvrant en 1891, sur la base des observations

de la latitude géographique, une oscillation en 433 jours, *le terme de Chandler*, d'une amplitude de 0,3" (10 m à la surface), à laquelle s'ajoute un terme annuel de l'ordre de 0,1" (Fig.2.2). Nous verrons que l'oscillation de 433 jours s'explique par un allongement de la période d'Euler en raison de la non rigidité de la Terre. D'autre part la précession-nutation s'accompagne d'un mouvement du pôle diurne, rétrograde (dans le sens indirect dans le RRT), à la hauteur de 20 mas au plus (Fig.2.2).

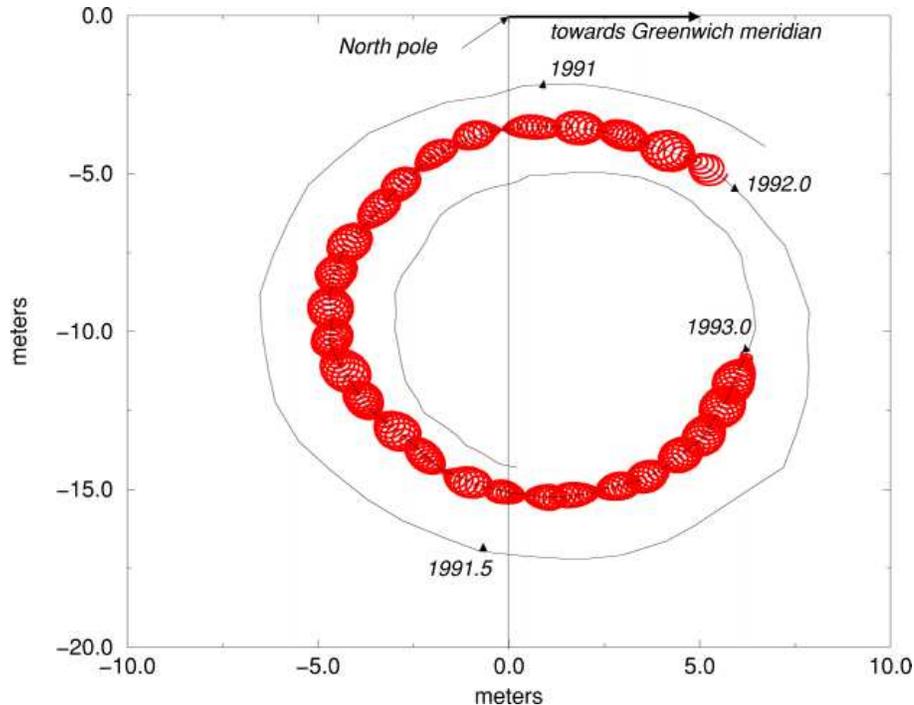


FIG. 2.2 – Mouvement de l'axe de rotation sur la croûte terrestre. Noter la composante à long terme, constitué du terme annuel et de l'oscillation libre de Chandler, ainsi que les boucles diurnes rétrogrades qui accompagnent la précession-nutation.

Variations de la vitesse de rotation ou de la longueur du jour La rotation diurne assurait la fonction d'une horloge sans défaut, jusqu'à ce que Newcomb, Spencer Jones (1926)¹, de Sitter (1927) découvrent une décélération séculaire de la vitesse de rotation (+1,6 ms par siècle sur la durée du jour, et des fluctuations se déroulant sur 10 à 70 ans (de l'ordre de 5 ms sur la durée du jour), et dont la cause, probablement interne, demeure mal cernée (voir Fig. 2.3). Quelques années plus tard Stoyko (1937) découvrait des variations saisonnières de l'ordre de 0.5 ms, que l'on explique très bien par l'effet des vents.

Les observations de géodésie spatiale (SLR, GPS) permettent de mesurer l'écart ΔLOD (LOD abréviation de l'anglais "Length Of Day") de la longueur du jour par rapport à sa valeur nominale de 86400 s TAI. Les observations astrométriques, aujourd'hui les observations des radio-sources extragalactiques par radio-interférométrie à très longue base, donnent non pas accès à ΔLOD , mais à l'angle de rotation de la Terre dans le plan équatorial, et dont les irrégularités résultent de l'intégration des variations de la vitesse de

¹"The rotation of The Earth", *Monthly Notice of The Royal Society*, 87, 1926

rotation. Posons celle-ci égale à $\omega = \Omega(1 + m_3)$ où Ω est la vitesse angulaire de rotation nominale, associée à la longueur du jour solaire moyen $\overline{LOD} = 86400$ s TAI et où m_3 reflète les variations de cette vitesse. Nous avons :

$$LOD = k \frac{2\pi}{\Omega(1 + m_3)} \quad (2.1)$$

où k est le facteur pour passer du jour sidéral au jour solaire moyen. On reconnaît $\overline{LOD} = \frac{2\pi}{\Omega}$ la durée du jour de référence, égale à 86400 s TAI. En négligeant les termes du second ordre, l'écart de la durée du jour $LOD - \overline{LOD}$ est :

$$\Delta LOD = -\overline{LOD} m_3 \quad (2.2)$$

La variation de l'angle de rotation de la Terre entre la date initiale t_0 et la date t se déduit de ω par intégration :

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^t \omega dt = \int_{t_0}^t \Omega(1 + m_3) dt \quad (2.3)$$

soit

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \Omega(t - t_0) + \int_{t_0}^t \Omega m_3 dt \quad (2.4)$$

ou encore

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \Omega(t - t_0) - \int_{t_0}^t \Delta LOD \frac{\Omega}{2\pi k} dt \quad (2.5)$$

On distingue ainsi la partie variant uniformément avec le temps de celle-ci qui est irrégulière, expression intégrale des excès de la longueur du jour.

2.3 Principe de la paramétrisation de la rotation terrestre et de sa mesure

A proprement parler le vecteur de rotation n'est pas déterminé directement par les observations brutes. Celles-ci, hauteur, azimuth, heure, dans le cas de pointés astrométriques, mesure de temps pour les techniques géodésiques, sont fonction de l'orientation du réseau des stations d'observation par rapport au repère de référence céleste.

Classiquement, l'orientation d'un repère mobile est représenté par le produit de trois rotations successives, telle que chacune d'elles s'effectue autour d'un axe du repère, transformé ou non, ne coïncidant pas avec celui de la rotation précédente, si elle existe. La succession de ces rotations est schématisée par la séquence :

$$(X_i) \xrightarrow{R_l(\alpha_l)} (x_i^{(1)}) \xrightarrow{R_m(\alpha_m)} (x_i^{(2)}) \xrightarrow{R_n(\alpha_n)} (x_i)$$

où $R_l(\alpha_l)$, par exemple, désigne une rotation d'angle α_l autour de l'un des trois axe x_i , et $m \neq l$, $n \neq m$.

Cette séquence, notée (lmn) peut être réalisée de 12 façons différentes. La plus utilisée est (313). Elle correspond aux *angles d'Euler* classiques $\alpha_3 = \psi$, $\alpha_1 = \theta$ et $\alpha_2 = \Phi$.

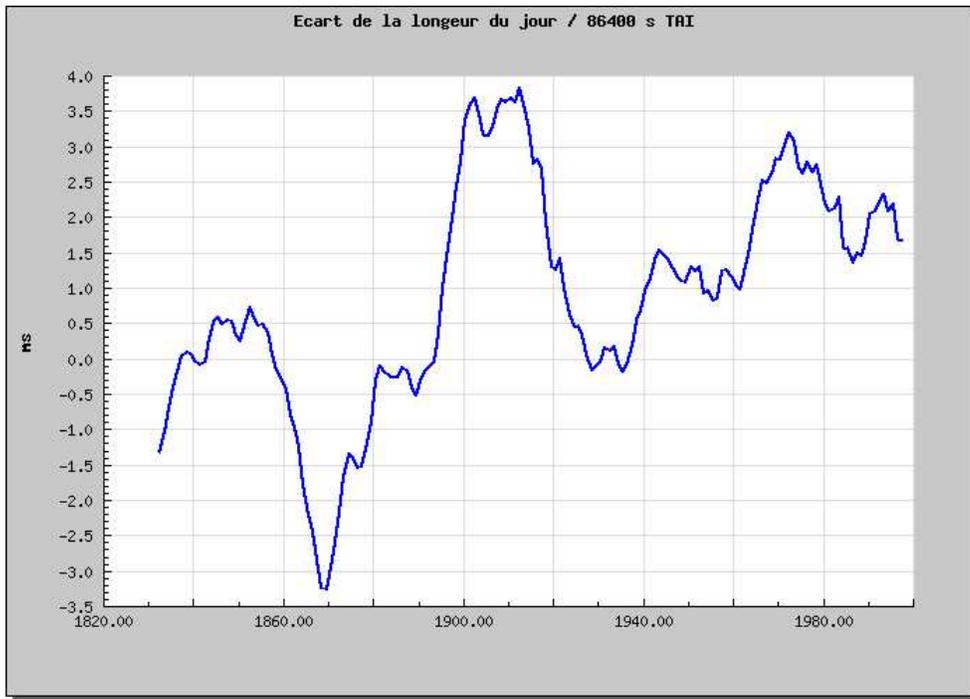


FIG. 2.3 – Variations à long terme de la longueur du jour de 1832 à 1997. La valeur de référence est 86400 s TAI (série produite par le JPL, disponible sur <http://hpiers.obspm.fr>)

L'angle ψ est appelé *angle de précession*², θ *angle de nutation*³ et ϕ *angle de rotation propre*. L'angle θ ($\widehat{OX_3, Ox_3}$) est orienté par le vecteur $\vec{x}_1^{(1)}$. Cette séquence part d'ordinaire d'un repère céleste écliptique (ayant pour plan fondamental l'écliptique d'une époque de référence et pour origine dans ce plan l'équinoxe moyen de cette époque).

En principe ces trois angles suffisent pour déterminer l'orientation de l'ITRF par rapport à l'ICRF. Mais, au moins l'un d'eux, en l'occurrence Φ varie environ de 360° en 24 heures (15 mas par ms). Il faudrait les donner avec un pas temporel de 0,1 ms si l'on désirait une précision de 1 mas sur l'orientation spatiale de la Terre. Il est hors de question de procéder ainsi. Conformément à la paramétrisation standard adoptée par le Service International de la Rotation de la Terre et des Systèmes de Référence, l'idée est de séparer, dans les angles de rotation, les changements modélisés (rotation diurne, précession-nutation) de ceux qui sont inconnus.

Les angles Ψ et θ qui donnent la direction de l'axe des pôles géographiques dans l'espace sont modélisés dans leur variation à long terme (termes de périodes supérieures à 2 jours dans l'espace de Fourier), avec une précision de l'ordre de 1 mas : c'est la précession-nutation. Le modèle de précession-nutation définit un axe dont l'intersection avec l'hémisphère nord de la sphère céleste est appelée *Pôle Céleste Intermédiaire (Celestial Intermediate Pole, CIP)*⁴. On peut montrer que le CIP s'écarte au plus de 20 mas de

²à ne pas confondre avec les angles de précession astrométriques qui sont des angles variant linéairement dans le temps

³à ne pas confondre avec les angles de nutation astrométriques qui désignent des angles variant périodiquement dans le temps

⁴Avant l'assemblée générale de l'UAI en 2000, la définition de ce pôle, alors appelé *Pôle Céleste des*

l'axe instantané de rotation. C'est pourquoi on compte l'effet de la rotation diurne autour de cet axe. La partie non-modélisée des angles Ψ et θ est scindée en deux parties : (i) une correction sur la précession-nutation, c'est-à-dire sur la position spatiale du CIP (ii) un terme évoluant avec des fréquences inférieures à deux jours, associée aux fluctuations géophysiques de l'axe des pôles géographiques Gz. Ce dernier terme n'est pas coordonné dans le repère céleste, on le paramétrise dans le repère terrestre après avoir appliqué la matrice de rotation diurne. Dans ce repère, l'écart entre le CIP et l'axe Gz évolue lentement. Nous allons donc distinguer 3 types de paramètres d'orientation : (i) des écarts céleste pour la position du CIP, (ii) une correction rendant compte des irrégularités de l'angle de rotation (iii) les coordonnées terrestres du CIP, ainsi que cela est décrit ci-après.

Paramètres d'orientation n°1, n°2 : les écarts au pôle céleste. Tout d'abord deux petits angles, (dX, dY) inférieurs à la milliseconde de degré, appelés les "écarts au pôle céleste, compensent les défauts du modèle de précession-nutation (à l'heure celui adopté par l'UAI en 2000) de l'axe de figure de la Terre. Celui-ci a pour coordonnée équatoriale céleste $X = X_{mod} + dX, Y = Y_{mod} + dY$. Par convention, ils contiennent des oscillations dont les périodes sont supérieures à deux jours.

Paramètres d'orientation n°3 : UT1-UTC. Le qualificatif "intermédiaire" prend tout son sens, puisque c'est autour de l'axe du CIP que l'on compte la rotation diurne et ses fluctuations. Comme nous l'avons mentionné plus haut, le CIP n'est pas l'axe de rotation instantané mais on peut montrer qu'il en constitue un moyenne diurne qui ne s'en écarte pas plus de plus de 20 millisecondes de degré. Le troisième paramètre d'orientation est associé aux irrégularités de l'angle de rotation de la Terre θ autour du CIP. Celui-ci est constitué d'une partie variant linéairement avec le temps atomique TAI, et d'une partie irrégulière, $\delta\theta$:

$$\theta = \theta_0 + \Omega TAI + \delta\theta \quad (2.6)$$

où θ_0 est une constante, Ω est la vitesse angulaire de rotation associée au jour solaire atomique de 86400 s ou au jour sidéral de 86164.09891s ($360^\circ/86164.09891s$). Nous définissons alors le temps de la rotation terrestre ou Temps Universel 1 (Universal Time 1, UT1) comme le temps que mettrait la Terre à accomplir l'angle θ à la vitesse angulaire uniforme Ω , soit $UT1 = \frac{\theta}{\Omega}$. L'équation (2.6) nous permet alors de tirer

$$\delta\theta = \Omega(UT1 - TAI) - \theta_0. \quad (2.7)$$

expression faisant apparaître le paramètre correctif du temps atomique $UT1 - TAI$, considéré en tant que tel comme paramètre d'orientation de la Terre, puisque spécifiant parfaitement l'angle de rotation. En fait, ce n'est pas la différence $UT1 - TAI$ qui est en usage, mais $UT1 - UTC$, où UTC est le temps atomique TAI décalé d'un nombre entier de seconde, de telle sorte que l'écart $|UT1 - UTC|$ reste toujours inférieur à 0.9 s. Ce temps UTC ou Temps Universel Coordonné est l'échelle de temps légale, radiodiffusée et assurant un synchronisation mondiale. Elle a été introduite en 1972, pour disposer d'une échelle de temps atomique qui reflète le temps de la rotation terrestre à la seconde près en vue de la détermination des longitudes. Depuis le début de TAI, en 1958, alors égal à UT1, UT1 a pris un retard voisin de 33 s (en 2006), ce que l'on traduit par $UTC - TAI = -33$

Ephémérides, ne stipulait pas s'il contenait les termes diurnes et subdiurnes de la précession-nutation

s. Pour maintenir la condition $|UT1 - UTC| < 0.9s$, on retarde UTC en introduisant, si nécessaire, une seconde atomique intercallaire à dates fixes. Ainsi le 31 décembre 2005 a duré 86401 s TAI.

Paramètres d'orientation n°4, n°5 : les coordonnées du pôle x et y . A l'issue de l'application de la rotation diurne, nous ne sommes pas tout à fait dans le repère terrestre. Il nous reste à faire basculer le plan équatorial du CIP sur le plan équatorial géographique, au moyen de deux angles x et y , n'excédant pas $1''$ et qui donnent aussi les coordonnées du CIP dans le repère terrestre $x_p = x$, $y_p = -y$ ($z_p \approx 1$). La trajectoire terrestre du CIP est dépeinte sur la figure 2.2 par la trajectoire moyenne de l'axe instantané de rotation, affranchie de ses oscillations diurnes.

Paramétrisation globale de l'orientation spatiale de la Terre et estimation

Afin d'obtenir l'orientation globale du repère de référence terrestre, on applique successivement :

- la rotation \overline{NP} amenant le Système de Référence Céleste (SRC) sur le Système Equatorial Vrai (SEV), dont l'expression (inverse), donnée par :

$$[SEV] = \overline{NP}(X + d\mathbf{X}, Y + d\mathbf{Y})[RRC] \quad (2.8)$$

- une rotation d'angle $\theta = \Omega UTC + \Omega(UT1 - UTC) + \theta_0$ autour du CIP pour amener le méridien céleste origine (demi-grand cercle joignant le pôle du CIP et "l'origine céleste conventionnelle") sur le méridien issu du CEP et passant par l'origine terrestre conventionnelle. A l'issue de cette rotation nous sommes dans le système équatorial vrai tournant SEVT :

$$[SEVT] = \overline{R}_3(\Omega UTC + \Omega(\mathbf{UT1} - \mathbf{UTC}))[SEV] \quad (2.9)$$

- une rotation permettant de passer du repère équatorial vrai tournant au RRT lui-même ; cette rotation est fonction de l'écart entre le CIP et l'axe Gz (réalisé par l'axe Gz du RRT, quantifié par les coordonnées équatoriales du CIP $(x, -y)$ dans le RRT. On a :

$$[SRT] = \overline{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y})[SEVT] \quad (2.10)$$

Finalement l'orientation de la Terre peut être décrite matriciellement par :

$$[SRT] = \overline{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\overline{R}_3(\Omega UTC + \Omega(\mathbf{UT1} - \mathbf{UTC}))\overline{NP}(X + d\mathbf{X}, Y + d\mathbf{Y})[SRC] = \overline{Q}[SRC] \quad (2.11)$$

Les observations géodésiques dépendent de la matrice d'orientation ci-dessus et d'autres paramètres selon des relations "d'observation" propre à la technique envisagée. En tout cas, par linéarisation des relations d'observation autour de valeurs de paramètres a-priori (issues d'un modèle ou d'une prédiction), on peut ajuster les paramètres d'orientation $dX, dY, UT1 - UTC, x, y$.

2.4 Evolution des techniques.

Dès 1900 des services internationaux, successivement le Service International des Latitudes (ILS), le Service International du Mouvement du Pole (IPMS), le Bureau International de l'Heure (BIH) ont été chargés de collecter et de combiner les mesures astrométriques en vue d'estimer régulièrement les coordonnées du pôle de rotation. Le BIH a donné le paramètre UT1 d'une façon routinière depuis 1967. Toutes les mesures étaient basées sur l'astrolabe de Danjon, la lunette méridienne, le tube zénithal ou les instruments circum-zénithaux ; elles étaient données tous les 5 jours, mais l'atmosphère limitait leur précision à 0,01". Depuis 1972, l'éclosion des techniques de géodésie spatiale, à commencer par le tracking Doppler et le tir laser sur la Lune (Lunar Laser Ranging, SLR), puis à partir de 1978, le tir laser sur satellite (Satellite Laser Ranging, SLR) et la radio-interférométrie à très longue base sur les radio sources extragalactiques (Very Long Baseline Interferometry, VLBI) a permis un bond dans la précision des paramètres d'orientation de l'ordre d'un facteur 10. La figure 2.4 reflète l'évolution du poids des techniques dans les détermination des EOP. Depuis 1986, l'astrométrie optique n'est plus utilisée dans la détermination courante des EOP. A partir de 1993, le GPS s'est imposé peu à peu comme la meilleure technique pour déterminer le mouvement du pôle et la longueur du jour. Cependant, le VLBI reste la seule technique à même de fournir UT1 et les écarts aux pôle céleste. Depuis 1988, le BIH a été remplacé par le Service International de la Rotation de la Terre et des Systèmes de Référence (International Earth Rotation and Reference System Service, IERS). Jusqu'en 1997 les activités de l'IERS étaient principalement concentrés à l'Observatoire de Paris (Bureau Central) et à l'US Naval Observatory (séries "rapide", en vue d'une utilisation temps réel). Les activités de l'IERS s'étant étoffées, une restructuration s'est imposée. La partie administrative et organisationnelle est partie à Frankfort, mais l'observatoire de Paris reste le centre névralgique où l'on fournit la série temporelle des EOP qui a le statut de référence internationale (série combinée C04). La maintenance du repère terrestre international a été confiée à l'IGN, tandis que l'Observatoire de Paris et l'USNO sont chargés de maintenir conjointement le repère céleste international. Les "fluides géophysiques" (atmosphère, océans, noyau fluide, eaux continentales, etc) jouant un rôle central dans les irrégularités de la rotation terrestre, un centre de l'IERS leur est désormais consacré. Depuis 1997, les techniques géodésiques qui étaient jusqu'alors chapotées par l'IERS ont pris leur autonomie dans le cadre de nouveaux services internationaux, qui leur sont propres. La précision actuelle des EOP est de l'ordre de 0.2 mas pour leur détermination journalière.

Techniques géodésiques modernes. Pour le VLBI la grandeur de base est la différence de temps d'arrivée d'un front d'onde d'une source radio en deux radiotélescopes distants de quelques milliers de km. Dans le cas idéal ce délai est uniquement fonction de la projection orthogonale de la ligne de base entre les deux télescopes sur la direction de la radiosource. Le cas réel est plus complexe, car le délai intègre des effets non-géométriques, comme le défaut de synchronisation des horloges, la courbure du front d'onde lors de son passage dans l'atmosphère. En tout cas, les retards VLBI, peuvent être explicités en fonction des paramètres d'orientation du réseau de radiotélescopes par rapport aux radiosources extragalactiques visées, et d'autres paramètres conditionnant les effets non-géométriques. Par inversion, on peut remonter aux paramètres d'orientation. Les observations s'articulent autour de quelques réseaux de radiotélescopes, qui observent

CONTRIBUTION OF THE TECHNIQUES TO THE IERS COMBINED SOLUTIONS

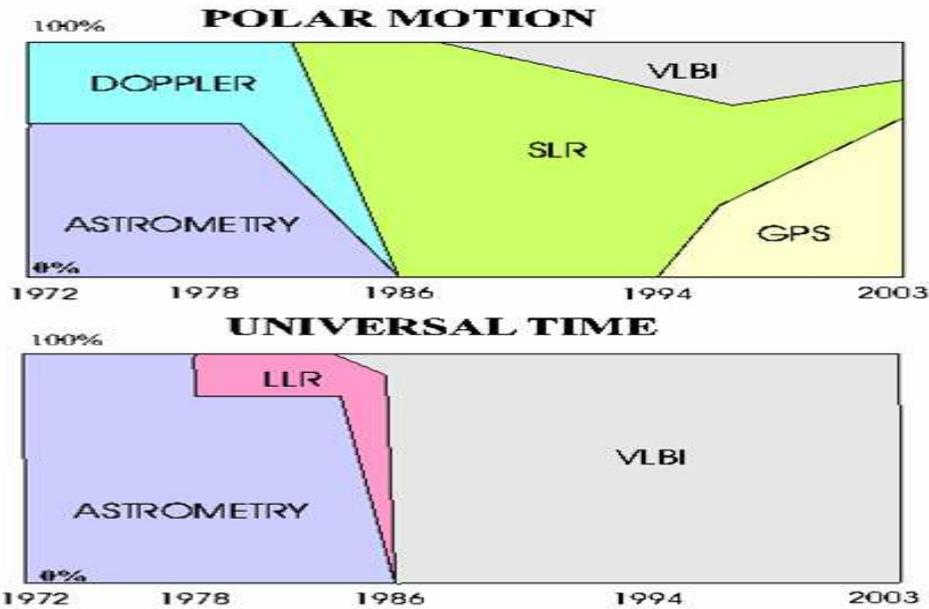


FIG. 2.4 – Evolution du poids des techniques dans la détermination des coordonnées du pôle et de UT1 de 1970 à nos jours.

communément sur 24 heures un certain nombre de radio-sources constituant le repère de référence céleste international. Les sessions d'observations sont espacées de 5 à 7 jours. On établit une distinction entre les paramètres d'arc comme les EOP, les coordonnées des radio-sources qui sont constant durant toute la session d'observation et les paramètres "locaux", tels que les sauts d'horloges, le retard atmosphérique, qui varient constamment. Les arrivées des fronts d'onde sont enregistrées de manière indépendante en chaque site sur des bandes magnétiques. Celles-ci sont ensuite envoyées à un centre, où un "corrélateur" permet de déterminer les différences dans les temps d'arrivées.

La technique du tir laser se fait sur des satellites artificiels ou sur la lune. L'observation de base est le temps aller et retour d'un pulse laser, réfléchi par un coin cube placé sur le satellite. Ce temps est associé à la distance qui sépare la station du satellite via la vitesse de la lumière. Comme cette distance est elle fonction de l'orientation de la Terre dans l'espace, on conçoit donc que l'on puisse remonter aux EOP par cette technique. A l'heure actuelle la précision de la mesure atteint 50 ps, voire moins, c'est-à-dire 1 cm en distance.

Le Système de Positionnement Global par satellite est fondé sur un ensemble de satellite qui émettent de manière permanente des signaux radio en direction du sol, dans lesquels sont codés leur temps d'émission. Les récepteurs terrestres, équipés d'horloges synchronisées avec celles des satellites, permettent de mesurer le temps aller des signaux, et d'en déduire la distance qui les sépare du satellite émetteur. Si un récepteur enregistre simultanément les signaux de 3 satellites, le récepteur est positionné à l'intersection des 3 sphères centrées sur les satellites, et de rayons les distances déduites des 3 temps aller.

De cette façon, on obtient la position du récepteur dans le repère inertiel des satellites. A partir de la rotation entre le repère inertiel et le repère terrestre, on remonte à la position du récepteur dans le repère terrestre. C'est le principe du positionnement global. Inversement, si les positions d'un ensemble de récepteurs sont parfaitement connues, les mesures nous permettent d'affiner notre connaissance de la rotation du repère terrestre par rapport au repère inertiel. A l'heure actuelle le Global Positioning System (GPS) de l'armée américaine prédomine. Ses concurrents sont le GLONASS russe, et le système européen GALILEO, en développement, dont le premier satellite a été envoyé le 28 décembre 2005 depuis la base de Baïkonour et dont la phase opérationnelle débutera en 2008.

Comparaison des techniques. La technique VLBI est certainement la plus complète, mais plus lourde et la plus coûteuse à mettre en oeuvre. C'est la seule qui permettent de déterminer sur plusieurs jours les variations de l'orientation de la Terre dans l'espace, à savoir la précession-nutation et UT1. La raison en est que les mesures VLBI sont directement rattachés au repère céleste, parfaitement stable. Les techniques satellitaires ne permettent pas de déterminer l'orientation de la terre dans un repère aussi stable. La qualité du repère associé aux satellites est précisément associée à la justesse du modèle orbitographique. Or, il est impossible de modéliser la trajectoire des satellites sur plusieurs jours avec une précision suffisante, principalement à cause du freinage atmosphérique. Il est donc hors de question que les satellites fournissent des "points d'encrage céleste" pour des durées dépassant la semaine. A un moment ou à un autre, l'orbite doit être réajustée en fonction des observations. A contrario, si les techniques satellitaires sont impropres à donner la précession-nutation et UT1 pour des durées supérieures à 7 jours, elles sont très efficaces pour déterminer les coordonnées du pôle et de la longueur du jour. En effet le mouvement du pôle, dans le repère inertiel, apparaît comme une oscillation diurne dans le sens trigonométrique de l'axe des pôles géographiques. C'est pourquoi sa mesure ne requiert pas la stabilité du repère inertiel sur plusieurs jours.

2.5 Relations cinématiques

Si les composantes du vecteur instantané de rotation dans le repère céleste ou terrestre ne font pas l'objet de déterminations routinières, elles méritent une attention particulière lorsqu'on s'attache à une description théorique de la rotation terrestre. C'est pourquoi il est important d'établir des relations entre les paramètres d'orientation (angles d'Euler, élément de la matrice d'orientation, etc..) et le vecteur instantané de rotation.

Le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$ du SRT par rapport au SRC s'exprime dans le SRT sous la forme usuelle $\vec{\omega} = \Omega(m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + (1 + m_3)\vec{x}_3)$, Ω étant la vitesse de rotation de référence de la Terre ⁵ et l'on introduit alors la variable complexe $m = m_1 + im_2$.

$\vec{\omega}$ est la résultante des rotations instantanées autour de chacun des trois axes de la séquence (lmn) , c'est à dire :

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}_l \vec{X}_l + \alpha_m \dot{x}_m^{(1)} + \alpha_n \dot{x}_n^{(2)} \quad (2.12)$$

En exprimant les composantes de $\vec{\omega}$ dans le SRT en fonction des angles α_l , α_m et α_n ,

⁵fixée par les IERS Standards 92à 72921151.467064 picorad/s

on obtient des relations cinématiques combinant les composantes du vecteur instantané de rotation dans le SRT, les angles d'orientation du SRT et leur dérivée temporelle.

Pour la séquence eulérienne classique (313), nous obtenons les relations cinématiques dites d'Euler :

$$\begin{aligned}\dot{\theta} + i\dot{\Psi} \sin \theta &= \Omega m e^{i\Phi} \\ \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \cos \theta &= \Omega(1 + m_3)\end{aligned}\tag{2.13}$$

En exprimant les composantes de ω dans le SRC nous obtenons les relations cinématiques reliant les composantes célestes du vecteur instantané de rotation et les angles d'Euler :

$$\omega_X + i\omega_Y = \dot{\theta} e^{i\Psi} + i\dot{\Phi} \sin \theta e^{i\Psi}\tag{2.14}$$

$$\omega_Z = \dot{\Psi} + \dot{\Phi} \cos \theta\tag{2.15}$$

Chapitre 3

Fondement de l'étude dynamique de la rotation terrestre

3.1 Cadre newtonien de la rotation terrestre

3.1.1 Equations newtoniennes du mouvement de rotation

Pour écrire les équations newtoniennes de la rotation terrestre, l'hypothèse sur l'origine du repère inertiel n'intervient pas. En effet les équations de Newton permettent d'opérer un découplage complet entre le mouvement orbital de la Terre et son mouvement de rotation autour de son centre de masse, comme nous allons le rappeler ci-dessous :

Considérons la relation fondamentale de la dynamique, exprimée dans un repère inertiel dont l'origine n'est pas spécifiée :

$$dm \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = d\vec{F} \quad (3.1)$$

où \vec{R} positionne une masse élémentaire dm de la Terre dans un repère inertiel, non spécifié, et $d\vec{F}$ est la somme des forces appliquées sur dm .

Le temps en mécanique de newton est supposé s'écouler de la même façon en tout lieu ; il est donc possible de coordonner l'ensemble des mesures de durée par un seul paramètre t .

Soit \vec{R}_0 le rayon vecteur du géocentre (le centre des masses de la Terre) dans le repère inertiel considéré et \vec{r} la position de dm , rapportée au repère géocentrique. Nous avons :

$$dm \frac{d^2 \vec{R}_0}{dt^2} + dm \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = d\vec{F} \quad (3.2)$$

En intégrant cette relation sur l'ensemble de la matière terrestre, on démontre aisément le théorème du centre de masse, c'est-à-dire :

$$M \frac{d^2 \vec{R}_0}{dt^2} = \vec{F}^{ext} \quad (3.3)$$

où \vec{F}^{ext} est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur la Terre, réduites presque exclusivement à la gravitation luni-solaire.

Il en résulte que :

$$dm \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = d\vec{F} - \frac{dm}{M} \vec{F}^{ext} \quad (3.4)$$

Cette équation caractérise le mouvement de l'élément de masse dm dans un repère géocentrique dont les axes gardent une orientation fixe dans un repère inertiel à fortiori indéfini. Ce repère barycentrique propre ou repère géocentrique dynamiquement non-tournant, du point de vue newtonien, n'est pas inertiel. Nous voyons que le mouvement de l'élément de masse est conditionné par la *force de marée* $\vec{\mathcal{F}}$ donnée par :

$$\vec{\mathcal{F}} = d\vec{F} - \frac{dm}{M} \vec{F}^{ext} \quad (3.5)$$

Le repère géocentrique dynamiquement non-tournant peut être assimilé *formellement* à un repère inertiel newtonien à condition de considérer la force de marée, que nous obtenons en retirant à la force totale s'exerçant sur l'élément dm , $d\vec{F}$, le terme $\frac{dm}{M} \vec{F}^{ext}$, c'est à dire, au coefficient dm près, l'accélération du géocentre dans un repère inertiel. La force d'interaction gravitationnelle entre la Terre et les corps célestes ne peut être mesurée, alors que les forces de marées (ou leur influence sur l'accélération de pesanteur) sont détectables par les gravimètres. Elles seules présentent une réalité sensible.

Ainsi tous les développements de la mécanique newtonienne peuvent être appliqués dans ce repère pourvu que l'on n'y considère que les forces de marée $\vec{\mathcal{F}}$.

Dans le cadre de la mécanique newtonienne, on peut donc envisager deux démarches pour traiter le problème de la rotation d'un corps. La plus commune consiste à appliquer le théorème du moment cinétique au corps considéré dans le repère barycentrique propre. La seconde méthode est fondée sur l'application directe de la relation fondamentale de la dynamique à l'ensemble des éléments de volume qui composent le corps et en interaction mutuelle; après intégration de ces équations différentielles ou d'un jeu réduit obtenus au moyen d'approximations, on obtient le champ des déplacements de ces éléments, dont on extirpe alors la partie associée au mouvement de rotation. Il va sans dire que cette méthode est extrêmement complexe à mettre en oeuvre et qu'on lui préfère la première, puisqu'elle s'attache d'emblée de jeu à des quantités globales, comme les moments d'inertie, et se formule en fonction des grandeurs recherchées, c'est-à-dire les composantes du vecteur instantané de rotation.

Nous allons donc développer la théorie de la rotation terrestre en nous basant sur le théorème du moment cinétique.

3.2 Equations d'Euler-Liouville

3.2.1 Equations d'Euler-Liouville

Dans le traitement qui suit, le système mécanique inclut au moins la Terre restreinte à sa partie solide, à laquelle on peut surimposer l'atmosphère et les océans. Cependant

nous sommes libres de rejeter ces couches fluides superficielles dans un système externe en interaction avec la Terre solide. Le théorème du moment cinétique nous dit que la variation du moment cinétique \vec{H} de la Terre est égale au moment $\vec{\Gamma}$ des forces extérieures qui lui sont appliquées ¹ :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{\Gamma} \quad (3.6)$$

Il est avantageux d'exprimer le théorème du moment cinétique par rapport au SRT pour deux raisons. D'une part notre point de vue est celui du géophysicien, attaché à la croûte terrestre, qui mesure des grandeurs au sol (marée gravimétrique, pression, vent, etc.). D'autre part nous faisons intervenir la matrice d'inertie et le vecteur instantané de rotation qui, dans le repère terrestre, sont séparables en une composante principale connue et des perturbations qu'il reste à déterminer. L'équation (3.6) transcrite dans le repère terrestre s'écrit :

$$\left(\frac{d[H]}{dt} \right)_{SRT} + [\omega] \wedge [H] = [L] \quad (3.7)$$

où $[H]$, $[\omega]$, $[L]$ sont les matrices colonnes des composantes, exprimées dans le SRT, du moment cinétique, du vecteur instantané de rotation du repère terrestre par rapport au repère céleste, et du moment de force respectivement.

Le moment cinétique de la Terre résulte de la somme des moments cinétiques de chacun des éléments de masse dm , positionnés par le rayon vecteur \vec{r} depuis le centre des masses de la Terre. Si \vec{v} désigne la vitesse d'un élément de masse quelconque dans le système céleste géocentrique, nous obtenons l'expression intégrale :

$$\vec{H} = \int_{Terre} \vec{r} \wedge \vec{v} dm \quad (3.8)$$

C'est à ce stade que nous introduisons le vecteur instantané de rotation de la Terre (plus exactement du manteau ou du repère terrestre) par rapport au système céleste. En effet le vecteur vitesse \vec{v} est décomposé en :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} + \vec{v}_r \quad (3.9)$$

où \vec{v}_r est la vitesse relative à la croûte. Cette décomposition n'est pas gratuite : elle reflète le fait que la vitesse d'un élément de masse est due essentiellement à la rotation de la Terre (340 m/s à l'équateur) et dans une bien moindre mesure aux déplacements par rapport à la distribution moyenne des masses dans le manteau. En effet, pour les échelles de temps que nous allons explorer, supérieures à quelques heures, les seuls déplacements significatifs atteignent au plus 30 m/s ("jet-stream" dans la stratosphère vers 10-12 km d'altitude) ; les autres déplacements produisant des redistributions de masse à l'échelle planétaire, comme les marées luni-solaire dans le manteau et les océans, les marées "thermiques" de

¹pourvu que les forces internes soient centrales, ce qui est le cas si nous négligeons les forces électromagnétiques de Lorentz et que les forces externes soient des forces de marées au sens donné dans le paragraphe précédent

l'atmosphère activée par le chauffage solaire, sont extrêmement lents, de l'ordre du mètre par jour. En reportant l'expression (3.9) dans (3.8), nous obtenons :

$$\vec{H} = \int_{Terre} [r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}] dm + \int_{Terre} \vec{r} \wedge \vec{v}_r dm \quad (3.10)$$

La première intégrale, associée à la rotation globale du système, est le moment cinétique de rotation ou le terme *matière*; la seconde intégrale, associée au champ des vitesses \vec{v}_r en chaque point de la Terre, est le moment cinétique relatif ou le terme *mouvement*. L'équation précédente peut être formulée matriciellement dans un système d'axes quelconque par :

$$[H] = \bar{I}(t)[\omega] + [h] \quad (3.11)$$

où $\bar{I}(t)$ est la matrice d'inertie du système mécanique s'exprimant par :

$$I_{ij} = \int_{Terre} (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm \quad (3.12)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

En moyenne, pour des durées supérieures à quelques années, la Terre présente trois moments d'inertie principaux $A < B < C$ constants, admettant les valeurs : $A = 8.0101 \cdot 10^{37}$ kg m², $B = 8.0103 \cdot 10^{37}$ kg m², $C = 8.0365 \cdot 10^{37}$ kg m². Notons que $(A - B)/A \approx 2,5 \cdot 10^{-5}$ tandis que $(A - C)/A \approx (B - C)/B \approx 3 \cdot 10^{-3}$. Les deux premiers moments A et B ont leurs axes situés dans le plan équatorial géographique à moins de 1" près. Autrement dit l'axe d'inertie principal I_C est voisin de l'axe des pôles géographiques à 1" près. Les axes I_A et I_B ne coïncident pas avec les axes Gx et Gy du SRT. En effet l'axe I_A présente une longitude de $\lambda_A = -14,9291 \pm 0,0010^{\circ}$. Cela nous amène à définir le système terrestre intermédiaire $Gx'y'z'$ qui se déduit du SRT $Gxyz$ par une rotation constante d'angle $\lambda_A = -14,9291 \pm 0,0010^{\circ}$ autour de l'axe Gz . Dans $Gx'y'z'$, voisin du système des axes principaux d'inertie, la matrice d'inertie instantanée ³ prend une forme quasi-diagonale :

$$\bar{I}(t) = \begin{bmatrix} A + c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & B + c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & C + c_{33} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

où les c_{ij} sont les incréments d'inertie supposés petits dûs aux déformations ou aux anomalies de masse. Les redistributions globales de masses au sein de la Terre (marées solides et océaniques, processus thermiques dans l'atmosphère) produisent des variations des moments d'inertie tout au plus de l'ordre du millionième des moments d'inertie principaux ($c_{ij} \leq 10^{-8}A$) (déformations zonales de la Terre sous l'action de l'attraction luni-solaire). Les durées en jeu valent au moins quelques heures, si bien que $\dot{c}_{ij} \leq 10^{-8}A\Omega$. Les tremblements de terre causent des redistributions de masse locales sur quelques minutes, s'accompagnant par des variations c_{ij} de l'ordre de $10^{-11}A$ ($\dot{c}_{ij} \leq 10^{-7}A\Omega$).

Le système $G'y'z'$ étant un système d'axe de Tisserand, la contribution du manteau dans $[h]$ est nulle. les composantes h_i doivent être recherchées dans les mouvements du

²Association Internationale de Géodésie, 1999

³symétrique par définition

noyau ou des couches atmosphérique et océanique si celles-ci sont incluses dans le système mécanique. Le moment cinétique relatif est surtout produit par les vents atmosphériques, et atteint une valeur de l'ordre de $10^{26} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ pour sa composante axiale, soit $h_i \leq 10^{-8} A\Omega$ ($A\Omega \approx C\Omega \approx 6 \cdot 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$), ou encore un millionième du moment cinétique propre de la Terre. Compte tenu que les changements de circulation globale se déroulent au moins sur un jour $\dot{h}_i \leq 10^{-8} A\Omega^2$.

En intégrant l'expression (3.10) dans l'équation (3.7) nous obtenons les *équations d'Euler-Liouville* sous forme matricielle ⁴ :

$$\frac{d\bar{I}}{dt}[\omega] + \bar{I}\frac{d[\omega]}{dt} + \frac{d[h]}{dt} + \bar{W}(\bar{I}[\omega] + [h]) = [L] \quad (3.14)$$

où \bar{W} est la matrice antisymétrique du vecteur instantané de rotation, c'est-à-dire :

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Par rapport à ce système la Terre est animée d'une rotation autour d'un axe restant à proximité de l'axe $Gz = Gz'$ du repère terrestre (écart inférieur à 1"), avec une vitesse presque uniforme. En conséquence, le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$ s'exprime dans le repère $Gx'y'z'$ par :

$$\vec{\omega} = \Omega \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 + m_3 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

où $\Omega = 7.2921151467064 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ est la vitesse de rotation nominale de la Terre et les écarts m_i (sans dimension) sont petits devant l'unité (l'observation montre que $m_1 \sim m_2 \sim 10^{-6}$ et $m_3 \sim 10^{-8}$ et $\dot{m}_1 \sim \dot{m}_2 \sim 10^{-6}\Omega$ et $\dot{m}_3 \sim 10^{-8}\Omega$). Ici et dans la suite, les indices 1, 2 et 3 sont mis pour les composantes x , y et z respectivement.

Reportons les expressions de la matrice d'inertie (3.13) et des composantes terrestres du vecteur d'instantané de rotation (3.15,3.16) dans l'équation d'Euler Liouville. Le développement fait apparaître des termes de l'ordre de $10^{-6} A\Omega^2$: $\Omega\dot{c}_{ij}$, $A\Omega\dot{m}_i$, \dot{h}_i , $A\Omega^2 m_i$, Ωh_i , et des termes d'ordre supérieur par rapport à ces quantités :

$$\begin{aligned} \Omega\dot{c}_{ij}m_k &\leq 10^{-14} A\Omega^2, \\ A\Omega c_{ij}\dot{m}_k &\leq 10^{-14} A\Omega^2, \\ (C - A)\Omega^2 m_3 m_{1/2}, (B - A)\Omega^2 m_1 m_2 &\leq 10^{-16} A\Omega^2, \\ \Omega^2 c_{ij}m_k &\leq 10^{-14} A\Omega^2, \\ \Omega^2 c_{ij}m_k m_l &\leq 10^{-20} A\Omega^2, \\ \Omega h_i m_j &\leq 10^{-13} A\Omega^2, \end{aligned}$$

⁴elles gardent exactement la même forme dans tout autre système de coordonnées géocentrique; la forme originelle mise en évidence par Euler était celle associée à un ellipsoïde indéformable, où $[h]=0$ et $[I]$ devient une matrice diagonale

tout au plus atteignant $10^{-12}A\Omega^2$ (estimations effectuées d'après les bornes sur les quantités m_i , c_{ij} , h_i et leurs dérivées temporelles précisées plus haut). Nous ne retenons que les termes du 1er ordre et nous obtenons alors les équations d'Euler-Liouville linéarisées :

$$m_1 - \frac{B}{(C-A)\Omega} \dot{m}_2 = \frac{\Omega c_{13} + h_1}{\Omega(C-A)} + \frac{\Omega \dot{c}_{23} + \dot{h}_2}{\Omega^2(C-A)} - \frac{L_2}{\Omega^2(C-A)} \quad (3.17)$$

$$m_2 + \frac{A}{(C-B)\Omega} \dot{m}_1 = \frac{\Omega c_{23} + h_2}{\Omega(C-B)} - \frac{\Omega \dot{c}_{13} + \dot{h}_1}{\Omega^2(C-B)} + \frac{L_1}{\Omega^2(C-B)} \quad (3.18)$$

$$\dot{m}_3 = -\frac{\dot{c}_{33}}{C} - \frac{\dot{h}_3}{C\Omega} + \frac{L_3}{C\Omega} \quad (3.19)$$

L'erreur introduite par la suppression des termes du second ordre équivaut à négliger dans m_1, m_2 et m_3 des variations d'au plus 10^{-11} , ce qui est tout à fait négligeable au regard de la précision des déterminations de l'orientation spatiale de la Terre (au mieux $100 \mu\text{s}$, $5 \cdot 10^{-10}$ radians).

Ces équations régissent l'évolution temporelle des composantes terrestres du vecteur instantané de rotation. Les second termes, appelées fonctions d'excitation et notées Ψ_i , regroupent des termes adimensionnés, associés aux moments de force extérieurs (L_i), aux déplacements de masse surfacique ou interne (moment cinétique relatif h_i), ou encore à des redistributions massiques (termes c_{ij} du tenseur d'inertie). Nous posons :

$$\psi_1 = \frac{\Omega c_{13} + h_1}{\Omega(C-A)} + \frac{\Omega \dot{c}_{23} + \dot{h}_2}{\Omega^2(C-A)} - \frac{L_2}{\Omega^2(C-A)} \quad (3.20)$$

$$\psi_2 = \frac{\Omega c_{23} + h_2}{\Omega(C-B)} - \frac{\Omega \dot{c}_{13} + \dot{h}_1}{\Omega^2(C-B)} + \frac{L_1}{\Omega^2(C-B)} \quad (3.21)$$

$$\psi_3 = -\frac{\dot{c}_{33}}{C} - \frac{\dot{h}_3}{C\Omega} + \frac{L_3}{C\Omega} \quad (3.22)$$

Le système d'équation (3.17,3.18,3.19) opèrent un découplage entre les différents processus susceptibles d'affecter la rotation terrestre. Par exemple nous pouvons calculer à part l'effet atmosphérique, sans considérer l'influence des marées luni-solaires.

Les deux moments d'inertie équatoriaux B et A présentent un écart relatif de 0.002%, presque 100 fois inférieur à celui qu'ils exhibent avec le moment d'inertie axial C. En première approximation cet écart peut être négligé pourvu que les effets considérés soient bien plus grand que les modifications induites par la triaxialité. Si nous prenons un ellipsoïde de révolution homogène (corps "biaxial" tel que $A = B$), l'axe I_A peut présenter n'importe quelle direction dans le plan équatorial, et nous pouvons donc adopter le repère terrestre $Gxyz$ pour écrire les équations d'Euler-Liouville. En adoptant les notations complexes $m = m_1 + im_2$, $L = L_1 + iL_2$, $h = h_1 + ih_2$, $c = c_{13} + ic_{23}$, et $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ les composantes équatoriales peuvent être ramassées dans l'expression :

$$m + \frac{i}{\sigma_e} \dot{m} = \psi = \frac{c}{C-A} + \frac{h}{(C-A)\Omega} - \frac{i}{\Omega} \left(\frac{\dot{c}}{C-A} + \frac{\dot{h}}{(C-A)\Omega} \right) + \frac{iL}{(C-A)\Omega^2} \quad (3.23)$$

où $\sigma_e = \frac{C-A}{A}\Omega$ est la pulsation dite d'Euler (période de 303.6 jours).

En apparence toutes les équations sont posées et le problème est totalement cerné. Il suffirait de caractériser les redistributions de masse atmosphériques, océaniques, hydrologiques, ou celles provoquées par les marées luni-solaires pour disposer des fluctuations du vecteur instantané de rotation et en reconstituer l'effet sur l'orientation spatiale de la Terre. En réalité, ce serait ignorer que les fluctuations de la rotation terrestre engendrent, par modification de l'effet centrifuge, des déformations du manteau et en conséquence des variations des tenseurs d'inertie c_{ij} . Ce serait aussi ignorer que l'atmosphère et les océans provoquent des déformations de la Terre solide, responsables de variations additives des c_{ij} . On pourrait penser que ces effets associés à la non-rigidité de la Terre sont trop faibles pour être détectés, mais il n'en n'est rien, et c'est pourquoi, dans les chapitres suivants, nous allons tenir compte des propriétés rhéologiques de la Terre et de sa structure interne. Cependant, au vue de la complexité du problème et dans un souci didactique, nous allons commencer par exposer le cas d'un modèle de Terre rigide.

3.2.2 Solution générale pour un modèle de Terre rigide

Ce que l'on entend habituellement par *modèle de Terre rigide*, c'est la Terre restreinte à sa partie interne (croûte, manteau, noyau fluide, graine solide) considérée comme rigide. Dans un tel cadre, les fonctions d'excitation ne sont pas influencées par les variations m_i du vecteur instantané de rotation (sous l'action de l'effet centrifuge), de sorte que les équations de Liouville linéarisées offrent un découplage parfait entre rotation instantanée et excitation.

Ellipsoïde de révolution. Si nous assimilons la Terre à un ellipsoïde de révolution homogène, l'équation différentielle qui régit le déplacement de l'axe de rotation est (3.23). En l'absence d'excitation la solution de l'équation (3.23), alors sans second membre est le terme circulaire :

$$m = m_0 e^{i(\sigma_e t + \phi_0)} \quad (3.24)$$

où m_0 et ϕ_0 représente l'amplitude et la phase, a-priori indéfinies. Cela signifie que le pôle de rotation peut décrire librement sur la croûte terrestre un cercle en une période de 303.6 jours. C'est le mouvement libre d'Euler, du nom du mathématicien suisse Léonard Euler qui l'a démontré théoriquement (1758) [2]. Il implique que l'angle entre le zénith d'un lieu donné et l'axe de rotation, c'est-à-dire la latitude astronomique, fluctue périodiquement au cours du temps. La recherche de variations des latitudes a été entreprise tout au long du dix-neuvième siècle. Celles-ci ont été effectivement suspectées puis décelées à l'Observatoire de Pulkovo (Russie) de 1843 à 1873 par Peters, Nyrén, et Gylden, puis par Künstner à Berlin en 1885 ⁵; mais c'est à l'astronome américain Chandler, en 1891 [1], qu'il reviendra de découvrir la période principale de ces oscillations, 430 jours et non 303 jours. Comme nous le verrons, cette différence est expliquée par la non-rigidité de la Terre, et en particulier son élasticité.

⁵L'histoire de la découverte du mouvement du pôle de rotation dans la Terre est rapportée dans les actes du colloque IAU 178 : "Polar Motion, historical and scientific problems", ed. Steven Dick, Dennis McCarthy and Brian Luzum., A.S.P. Conf. Ser., Vol. 208

La solution générale de l'équation (3.23) peut s'obtenir par transformation de Fourier⁶ ou en appliquant la méthode de la variation de la constante, qui consiste à trouver la fonction $C(t)$ telle que $C(t)e^{i\sigma_e(t-t_0)}$ vérifie l'équation différentielle considérée. On trouve aisément :

$$m(t) = -i\sigma_e e^{i\sigma_e t} \int_{-\infty}^t \psi(\tau) e^{-i\sigma_e \tau} d\tau = m(t_0) e^{i\sigma_e(t-t_0)} - i\sigma_e e^{i\sigma_e t} \int_{t_0}^t \psi(\tau) e^{-i\sigma_e \tau} d\tau \quad (3.25)$$

Les variations de la vitesse de rotation sont trouvées en intégrant l'équation (3.19) :

$$m_3(t) - m_3(t_0) = \psi_3(t) - \psi_3(t_0) \quad (3.26)$$

Ellipsoïde triaxial rigide. La triaxialité diminue légèrement la fréquence du mouvement libre d'Euler et le rend elliptique. En effet transposons les équations (3.17) et (3.18) sans second membre - rapportées au repère terrestre intermédiaire $Gx'y'z'$, voisin du repère (I_A, I_B, I_C) - dans l'espace des pulsations :

$$m_1(\sigma) - \frac{B}{(C-A)\Omega} i\sigma m_2(\sigma) = 0 \quad (3.27)$$

$$m_2(\sigma) + \frac{A}{(C-B)\Omega} i\sigma m_1(\sigma) = 0 \quad (3.28)$$

En éliminant par exemple $m_1(\sigma)$ entre ces deux équations, on aboutit à la condition

$$\sigma = \pm \sigma'_e \text{ avec } \sigma'_e = \sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}} \Omega \quad (3.29)$$

Le mouvement libre est donc la composition de deux mouvements circulaires opposés. Autrement dit il est elliptique. Le rapport de la pulsation de ce mouvement elliptique à celle d'Euler est :

$$\frac{\sigma'_e}{\sigma_e} = \sqrt{\frac{(C-B)A}{(C-A)B}} = 0.9962 \quad (3.30)$$

6

$$m(\sigma) = \sigma_e \frac{\psi(\sigma)}{\sigma_e - \sigma} = -\sigma_e \psi(\sigma) \mathcal{F}_\sigma [iH(t)e^{\sigma_e t}]$$

où $H(t)$ est la fonction d'Heaviside (valant 0 pour $t < 0$ et 1 pour $t \geq 0$) Par conséquent :

$$m(t) = -i\sigma_e \psi(t) * H(t) e^{i\sigma_e t}$$

* désignant le produit de convolution. En explicitant le produit de convolution ci-dessus, il vient :

$$m(t) = -i\sigma_e \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) H(t-\tau) e^{i\sigma_e(t-\tau)} d\tau$$

La fonction $H(t-\tau)$ n'étant non-nulle que pour $t-\tau \geq 0$, soit $\tau \leq t$ et valant alors 1, nous obtenons finalement :

$$m(t) = -i\sigma_e e^{i\sigma_e t} \int_{-\infty}^t \psi(\tau) e^{-i\sigma_e \tau} d\tau = m(t_0) e^{i\sigma_e(t-t_0)} - i\sigma_e e^{i\sigma_e t} \int_{t_0}^t \psi(\tau) e^{-i\sigma_e \tau} d\tau$$

La triaxialité diminue la fréquence de 0.4% et augmente la période d'Euler d'un peu plus d'un jour.

Puisque nous avons affaire à un mouvement elliptique, la solution libre s'écrit :

$$m_1(t) = m_0 \cos(\sigma'_e t + \phi_0) \quad (3.31)$$

$$m_2(t) = r m_0 \sin(\sigma'_e t + \phi_0) \quad (3.32)$$

où r est déterminé par l'équation $m_2(t) + \frac{A}{(C-B)\Omega} \dot{m}_1(t) = 0$:

$$r = \sqrt{\frac{(C-A)A}{(C-B)B}} = 1.00379 \quad (3.33)$$

On en conclut que le demi-grand axe, dirigé vers $0y' = I_B$, est environ 0.4% plus grand que le demi-petit axe situé dans le plan méridien origine passant par $0x' = I_A$. Si, typiquement m_0 vaut 200 mas, l'écart atteindra 0.8 mas, ce qui est tout à fait significatif. La triaxialité induit une polarisation du mouvement du pôle vers $\lambda_A + 90^\circ = 75^\circ$ EST de l'ordre de 1 mas.

A présent déterminons la forme générale du mouvement du pôle de rotation, en sous l'influence d'une excitation équatoriale. Les équations (3.17) et (3.18) dans l'espace des pulsations s'écrivent :

$$m_1(\sigma) - \frac{B}{(C-A)\Omega} i\sigma m_2(\sigma) = \psi_1(\sigma) \quad (3.34)$$

$$m_2(\sigma) + \frac{A}{(C-B)\Omega} i\sigma m_1(\sigma) = \psi_2(\sigma) \quad (3.35)$$

$$(3.36)$$

La solution, après décomposition en fraction simple, est :

$$m_1(\sigma) = \sigma'_e \frac{\frac{i}{r}\psi_2(\sigma) + \psi_1(\sigma)}{2(\sigma'_e - \sigma)} + \sigma'_e \frac{\frac{-i}{r}\psi_2(\sigma) + \psi_1(\sigma)}{2(\sigma'_e + \sigma)} \quad (3.37)$$

$$m_2(\sigma) = \sigma'_e \frac{-ir\psi_1(\sigma) + \psi_2(\sigma)}{2(\sigma'_e - \sigma)} + \sigma'_e \frac{ir\psi_1(\sigma) + \psi_2(\sigma)}{2(\sigma'_e + \sigma)} \quad (3.38)$$

En passant à la transformation de Fourier inverse, analogue à celle explicitée dans la note 6, on aboutit à :

$$m_1(t) = \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{\sigma'_e}{r} \psi_2(\tau) \cos[\sigma'_e(t - \tau)] + \sigma'_e \psi_1(\tau) \sin[\sigma'_e(t - \tau)] \right\} d\tau \quad (3.39)$$

$$m_2(t) = \int_{-\infty}^t \left\{ -\sigma'_e r \psi_1(\tau) \cos[\sigma'_e(t - \tau)] + \sigma'_e \psi_2(\tau) \sin[\sigma'_e(t - \tau)] \right\} d\tau \quad (3.40)$$

$$(3.41)$$

Les deux composantes qui sont rapportées aux axes $Gx' = I_A$ et $Gy' = I_B$ peuvent être regroupées :

$$m(t) = \int_{-\infty}^t -i\sigma'_e \left\{ \psi_1(\tau)r + i\frac{\psi_2(\tau)}{r} \right\} \cos[\sigma'_e(t - \tau)] + \sigma'_e \psi_2(\tau) \sin[\sigma'_e(t - \tau)] d\tau \quad (3.42)$$

3.3 Variations des paramètres d'orientation de la Terre

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, l'orientation de la Terre peut être décrite à l'aide des trois angles d'Euler, reliés aux composantes terrestres du vecteur instantané de rotation par les relations cinématiques d'Euler (2.13). L'intégration de ces relations permet d'obtenir l'orientation. Mais le procédé est rendu compliqué par le fait que ces relations ne sont pas linéaires. Dans la mesure où θ s'écarte peu d'une valeur moyenne θ_0 , on peut toujours, en première approximation, les résoudre en :

$$\begin{aligned} [\theta]_{t_0}^t + i [\psi]_{t_0}^t \sin \theta_0 &= \Omega \int_{t_0}^t m e^{i\Phi} d\tau \\ \Phi &= \Phi(t_0) + [\psi]_{t_0}^t \cos \theta_0 - \Omega \int_{t_0}^t (1 + m_3) d\tau \end{aligned} \tag{3.43}$$

Chapitre 4

Effet de la non rigidité

4.1 Déformation centrifuge

Comme la terre n'est pas un corps rigide, elle est déformée par (i) la charge variable de l'atmosphère et des océans (ii) le changement de la force centrifuge produit par les variations de la rotation (iii) les forces de marées luni-solaires. Les déformations occasionnées ont des répercussions sur le vecteur de rotation. Parmi toutes les déformations envisagées, il en est une qui dépend du vecteur instantané de rotation : la déformation centrifuge.

Il faut distinguer la déformation invariable de la Terre due à la partie constante de l'effet centrifuge - à l'origine du bourrelet équatorial - de celle qui est causée par les perturbations m et m_3 sur le vecteur de rotation.

Pour ce qui est de la partie constante, l'échelle de temps qui a présidé à la déformation est indéfinie, en tout cas séculaire. Une fois la déformation achevée, tout élément de masse de la Terre est en équilibre sous l'action conjuguée des forces gravitationnelles internes, centrifuge, et des forces de pression. La Terre se comporte alors comme un fluide en équilibre hydrostatique, dont il reste à déterminer la figure. Le problème de la forme de la Terre maintiendra en haleine les savants du XVIIIème siècle : il opposera les tenants de la mécanique newtonienne, d'après laquelle la Terre s'étire dans le plan équatorial, et l'école de Jean-Dominique Cassini qui voyait l'étirement dans la direction des pôles. Le renflement équatorial fut "enterriné" par les savants de cette époque quand, à l'issue d'expéditions scientifiques financées par le Roi de France, on eut observé qu'un même arc de méridien, de l'ordre de 1 degré (différence de latitude astronomique) est plus long au septentrion qu'à l'équateur.

Sous l'effet des perturbations de la rotation proprement dites, les échelles de temps sont trop courtes pour que les éléments de masse de la Terre adoptent l'équilibre hydrostatique. Lorsque l'effet centrifuge tire vers une direction légèrement différente, tout élément de masse est soumis à une force de rappel de la part des éléments environnants, qui s'oppose au déplacement centrifuge. En première approximation cet effet par une force élastique (force proportionnelle au déplacement) ou anélastique (déphasage entre la force appliquée et le déplacement). Les déplacements étant moins grands que ceux qui se produiraient dans le cas d'un fluide, les incréments d'inertie sont diminués par l'élasticité.

En tout cas nous nous attendons à ce que ces incréments d'inertie soient fonction des perturbations m et m_3 sur le vecteur instantané de rotation. Les équations d'Euler-Liouville seront modifiées en conséquence.

4.2 Potentiel centrifuge

En un point de la Terre, de rayon vecteur \vec{r} , le potentiel d'accélération centrifuge U_c est défini par :

$$\vec{\nabla}U_c = -\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \omega^2 \vec{r} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} \quad (4.1)$$

soit, en introduisant les coordonnées $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ du vecteur de rotation et les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de \vec{r} :

$$\vec{\nabla}U_c = \Omega^2 \begin{bmatrix} (\omega_2^2 + \omega_3^2)x - \omega_2\omega_1y - \omega_3\omega_1z \\ (\omega_1^2 + \omega_3^2)y - \omega_1\omega_2x - \omega_3\omega_2z \\ (\omega_1^2 + \omega_2^2)z - \omega_1\omega_3x - \omega_2\omega_3y \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Nous voyons immédiatement que U_c s'exprime sous la forme :

$$U_c = \omega_1^2 \frac{y^2 + z^2}{2} + \omega_2^2 \frac{x^2 + z^2}{2} + \omega_3^2 \frac{x^2 + y^2}{2} - (\omega_1\omega_2xy + \omega_1\omega_3xz + \omega_2\omega_3yz) \quad (4.3)$$

soit après élimination des termes du second ordre et introduction des coordonnées sphériques :

$$U_c = \Omega^2(1 + 2m_3) \frac{r^2 \cos^2 \phi}{2} - \Omega^2(m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda)r^2 \cos \Phi \sin \Phi \quad (4.4)$$

en Φ est la latitude et λ la longitude. Ce potentiel centrifuge peut être développé en harmoniques sphériques de degré 2 :

$$U_c = -\frac{\Omega^2}{3}(1 + 2m_3)r^2(P_{20}(\sin \Phi) - 1) - \frac{\Omega^2}{3}(m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda)r^2P_{21}(\sin \Phi) \quad (4.5)$$

avec les pôlynomes de Legendre : $P_{20}(\sin \Phi) = \frac{3\sin^2 \phi - 1}{2}$ et $P_{21}(\sin \Phi) = 3 \sin \Phi \cos \Phi$ (voir Annexe A.1). La variation de potentiel centrifuge induit par les irrégularités de la rotation terrestre est :

$$\Delta U_c = -\frac{\Omega^2}{3}2m_3r^2(P_{20}(\sin \Phi) - 1) - \frac{\Omega^2}{3}(m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda)r^2P_{21}(\sin \Phi) \quad (4.6)$$

Comme $m_3 \leq 10^{-8}$ et $m_1, m_2 \leq 10^{-6}$, c'est l'harmonique sphérique (2,1) causée par la pohlodie qui prédomine dans un rapport 100.

4.3 Figure moyenne de la Terre

En moyenne la Terre présente une rotation uniforme. L'effet centrifuge étant constant, malgré l'élasticité de ses matériaux, la Terre se déforme continûment jusqu'à ce que s'établisse l'équilibre hydrostatique : en tout point la force totale résultat de la gravitation (celle générée par la Terre), de l'accélération centrifuge et de la pression P est nulle.

Elle prend alors une forme ou figure invariable. L'équilibre hydrostatique se traduit par l'équation locale :

$$\vec{\nabla}P + \rho\vec{\nabla}W = 0 \quad (4.7)$$

où ρ est la masse volumique, P la pression régnant au point considéré, et W le potentiel de pesanteur égal à la somme du géopotential U et du potentiel centrifuge U_c . D'après cette équation toute surface équipotentielle de W est perpendiculaire non seulement à $\vec{\nabla}W$ mais aussi à $\vec{\nabla}P$. L'équilibre hydrostatique implique donc que les équipotentielles de pesanteur soit aussi des surfaces isobarres. A la surface de la Terre, la pression est égale à $P_S = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$, avec des variations relatives de l'ordre de 10%. A un 1 km de profondeur la pression atteint déjà 245 fois la pression atmosphérique. Dans la définition de la surface isobarre moyenne, les variations de la pression atmosphérique en surface ne sont pas prises en compte, et l'on peut donc considérer que la figure moyenne de la Terre coïncide à la fois avec une surface isobarre $P = P_S$ ou $P = 0$ si l'on en englobe l'atmosphère dans le système Terre. Donc la figure de la Terre est aussi une équipotentielle de la pesanteur W_0 .

Ce dernier point est fondamental car il va nous permettre d'établir la forme de la Terre. D'après l'Annexe A (Eq.), le géopotential U s'écarte de celui d'un corps sphérique homogène essentiellement par une harmonique sphérique de degré 2, proportionnelle à $J_2 = -C_{20} = (C - A)/(M_e R_e^2)$ où M_e est la masse de la Terre :

$$U = \frac{GM_e}{r} \left(1 + \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 C_{20} P_{20}(\sin(\Phi)) \right)$$

En prenant une rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω , le potentiel de pesanteur (voir Eq. 4.5 pour le potentiel centrifuge) est donc :

$$W = \frac{GM_e}{r} \left(1 + \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 C_{20} P_{20}(\sin(\Phi)) \right) - \frac{\Omega^2}{3} r^2 (P_{20}(\sin \Phi) - 1) \quad (4.8)$$

Nous égalons ce potentiel à l'équateur (rayon R_e) et au pôle nord (rayon R_p , potentiel centrifuge nul) :

$$\frac{GM_e}{R_e} \left(1 - \frac{C_{20}}{2} \right) + \frac{\Omega^2}{2} R_e^2 = \frac{GM_e}{R_p} \left(1 + \left(\frac{R_e}{R_p}\right)^2 C_{20} \right) \quad (4.9)$$

L'aplatissement géométrique α est défini par $\alpha = \frac{R_e - R_p}{R_e}$ soit $R_p = R_e(1 - \alpha)$. En négligeant les termes en α^2 (de l'ordre de $(1/300)^2$), il vient :

$$-\frac{C_{20}}{2} + \frac{\Omega^2 R_e^2}{2GM_e} = \alpha + C_{20} \quad (4.10)$$

d'où l'on tire :

$$\alpha = -\frac{3}{2}C_{20} + \frac{q}{2} \quad (4.11)$$

où l'on a défini la quantité q :

$$q = \frac{\Omega^2 R_e^2}{GM_e} \quad (4.12)$$

comme le rapport de l'accélération centrifuge à l'accélération gravitationnelle à l'équateur. Des valeurs des constantes Ω , R_e , GM_e tirées de l'Annexe B, nous avons $q = 3,46110^{-3} \approx 1/289$.

Par ailleurs le terme de degré 2 du géopotnetiel est donné par :

$$U_{20} = \frac{GM_e}{r} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 C_{20} P_{20}(\sin(\Phi)) \quad (4.13)$$

soit, étant donné que $C_{20} = -(C - A)/(M_e R_e^2)$:

$$U_{20} = \frac{G}{r} \left(\frac{1}{r}\right)^2 (C - A) \frac{3}{\Omega^2 r^2} U_{20}^c \quad (4.14)$$

où $U_{20}^c = -\frac{\Omega^2}{3} r^2 P_{20}(\sin \Phi)$ est le degré 2 de la partie constante du potentiel centrifuge. Finalement :

$$U_{20} = \frac{3G(C - A)}{\Omega^2 r^5} U_{20}^c \quad (4.15)$$

A la surface de la Terre, on pose :

$$U_{20} = k_s U_{20}^c \quad (4.16)$$

où k_s est donné par :

$$k_s = \frac{3G(C - A)}{\Omega^2 R_e^5} \approx 0.942 \quad (4.17)$$

est appelé nombre de Love séculaire. L'effet centrifuge "séculaire" sur le géopotential est k_s fois le potentiel centrifuge constant de degré 2.

En reportant l'expression de C_{20} dans (4.11), l'aplatissement géométrique (au pôle) peut encore s'exprimer par :

$$\alpha = \frac{q}{2}(1 + k_s) \approx \frac{1}{297,5} \quad (4.18)$$

Cette relation s'appelle l'équation de Clairaut.

La forme géométrique de la Terre, donnée par le rayon vecteur r peut être déduite de l'équipotentielle de pesanteur W à la surface, égale à $W(R_e)$:

$$\frac{GM_e}{r} \left(1 + \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 C_{20} P_{20}(\sin(\Phi))\right) - \frac{\Omega^2}{3} r^2 (P_{20}(\sin \Phi) - 1) = \frac{GM_e}{R_e} \left(1 - \frac{C_{20}}{2}\right) + \frac{\Omega^2}{2} R_e^2 \quad (4.19)$$

Il apparaît que r ne dépend que de la latitude, et que la Terre prend la forme d'un sphéroïde de révolution autour de l'axe des pôles. En posant alors $r = R_e(1 + \delta_r)$. L'équation précédente peut-être résolue aisément par rapport à δ_r en négligeant les termes du second ordre par rapport à l'aplatissement α ou δ_r . Finalement :

$$r = R_e(1 - \alpha \sin^2 \Phi) \quad (4.20)$$

4.4 Effet de l'élasticité sur les moments d'inertie

L'observation montre que la Terre solide, sous l'action de forces variables (fluctuations se déroulant de quelques heures à plusieurs années), ne suit plus le comportement d'un fluide, mais plutôt celui d'un solide élastique. Love a alors démontré que si la Terre

est soumise à un potentiel de force externe W_2 variable, ayant la forme d'une fonction harmonique de degré 2 (le potentiel de marée luni-solaire ou le potentiel centrifuge), alors les déformations induites provoquent un incrément du potentiel gravitationnel de la Terre donné par $\delta U = (R_e/r)^3 k_2 W_2$ à l'extérieur ou à la surface de la Terre ($r = R_e$). Le coefficient k_2 , appelé nombre de Love, est constant à la surface de la Terre et vaut 0,29 (voir Annexe B). Le phénomène s'explique de manière analogue à celui qui caractérise le comportement de la Terre sous l'action constante de l'accélération centrifuge (Eq. 4.16).

La perturbation du potentiel centrifuge est susceptible de provoquer des déformations. Celle de degré 0, proportionnelle à m_3 provoque une tension uniforme, radiale, et en conséquence ne peut jouer que sur le terme de degré 0 du géopotential. La perturbation de degré 2 s'écrit :

$$\delta U_{20}^c = -\frac{\Omega^2}{3} r^2 \{2m_3(P_{20}(\sin \Phi) + (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda)P_{21}(\sin \Phi))\} \quad (4.21)$$

et cause donc la variation

$$\Delta U = k_2 \left(\frac{R_e}{r}\right)^3 \delta U_{20}^c = -k_2 \left(\frac{R_e}{r}\right)^3 \frac{\Omega^2}{3} r^2 \{2m_3(P_{20}(\sin \Phi) + (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda)P_{21}(\sin \Phi))\} \quad (4.22)$$

du géopotential. Nous pouvons mettre cet incrément sous la forme usuelle du développement en harmoniques sphériques du géopotential :

$$\Delta U = \frac{GM}{r} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \{C_{20} P_{20} + (\sin \Phi)(C_{21}^c \cos \lambda + S_{21}^c \sin \lambda)P_{21}(\sin \Phi)\} \quad (4.23)$$

avec

$$C_{20}^c = -k_2 \frac{2R_e}{3GM} r^2 \Omega^2 m_3 \quad (4.24)$$

$$C_{21}^c = -k_2 \frac{R_e}{3GM} r^2 \Omega^2 m_1 \quad (4.25)$$

$$S_{21}^c = -k_2 \frac{R_e}{3GM} r^2 \Omega^2 m_2 \quad (4.26)$$

Ces incréments du géopotential suffisent à estimer l'effet de la déformation. En effet dans l'Annexe A.3, nous démontrons que les moments d'inertie de la Terre se déduisent intégralement des termes de degré 2 du géopotential pris à la surface de la Terre selon :

$$I_{12} = -2MR_e^2 S_{22} \quad (4.27)$$

$$I_{13} = -MR_e^2 C_{21} \quad (4.28)$$

$$I_{23} = -MR_e^2 S_{21} \quad (4.29)$$

$$I_{11} = \frac{1}{3} Tr(I) - \frac{1}{3} MR_e^2 C_{20} \quad (4.30)$$

$$I_{22} = \frac{1}{3} Tr(I) + \frac{1}{3} MR_e^2 C_{20} \quad (4.31)$$

$$I_{33} = \frac{1}{3} Tr(I) - \frac{2}{3} MR_e^2 C_{20} \quad (4.32)$$

Si le système mécanique (Terre + atmosphère + océans par exemple) voit sa masse conservée, on démontre que la trace du tenseur d'inertie est invariable¹. C'est l'hypothèse que

¹Rochester M.G., and Smylie, D.E., 1974, "On changes in the trace of the Earth's inertia tensor", J. Geophys. Res., pp. 4948-4951

nous ferons par la suite. Les coefficients du géopotential additif $k_2 U_c$ sont accompagnés par les variations I_{ij}^c des moments d'inertie, données par :

$$\begin{aligned}
I_{13}^c &= k_2 \frac{R_e^5}{3G} \Omega^2 m_1 \\
I_{23}^c &= k_2 \frac{R_e^5}{3G} \Omega^2 m_2 \\
I_{11}^c &= k_2 \frac{2R_e^5}{9G} \Omega^2 m_3 \\
I_{22}^c &= -k_2 \frac{2R_e^5}{9G} \Omega^2 m_3 \\
I_{33}^c &= k_2 \frac{4R_e^5}{9G} \Omega^2 m_3
\end{aligned} \tag{4.33}$$

En introduisant le nombre de Love séculaire k_s (Eq. 4.17), l'incrément d'inertie d'origine centrifuge $I^c = I_{13}^c + iI_{23}^c$ s'écrit

$$I^c = \frac{k_2}{k_s} (C - A)m \tag{4.34}$$

4.5 Influence de l'élasticité sur le mouvement du pôle

Nous considérons le cas d'une Terre élastique bi-axiale. Dans l'équation (3.23) régissant le mouvement du pôle, la fonction d'excitation comporte le terme d'origine centrifuge $I^c/(C - A) = \frac{k_2}{k_s} (C - A)m$ d'après l'Eq. (4.34), fonction du mouvement du pôle m . On peut le factoriser avec m (et \dot{m} pour sa dérivée temporelle) dans le membre de gauche de l'équation (3.23) et obtenir alors :

$$m\left(1 - \frac{k_2}{k_s}\right) + \frac{i}{\sigma_e}\left(1 + \frac{C - A}{A} \frac{k_2}{k_s}\right)\dot{m} = \psi^{pure} \tag{4.35}$$

où ψ^{pure} est l'excitation "purifiée" du mouvement du pôle. L'équation précédente s'écrit encore :

$$m + \frac{i}{\sigma_c}\dot{m} = \frac{\psi^{pure}}{1 - \frac{k_2}{k_s}} \tag{4.36}$$

où $\sigma_c = \sigma_e \frac{1 - \frac{k_2}{k_s}}{1 + \frac{C - A}{A} \frac{k_2}{k_s}}$. Dans le cas d'une Terre élastique la fréquence d'Euler est multipliée par le facteur $\frac{1 - \frac{k_2}{k_s}}{1 + \frac{C - A}{A} \frac{k_2}{k_s}} \approx 1 - \frac{k_2}{k_s} \approx 0.7$, et la période augmente dans le rapport 1.45.

On s'attend donc à observer l'oscillation libre vers 440 jours plutôt que 303 jours, et c'est effectivement le cas puisque la composante principale du mouvement du pôle, le terme de Chandler, présente une période de 433 ± 2 jours.

L'élasticité de la Terre a aussi pour conséquence d'amplifier l'effet de la fonction d'excitation, puisque celle-ci est multipliée par $1/(1 - \frac{k_2}{k_s}) = 1.43$. Mais comme nous le verrons par la suite, les redistributions de masses dans l'atmosphère ou les océans (associées aux variations de pression atmosphérique ou de hauteur d'eau) occasionnent une déformation de la croûte terrestre et en conséquence créent des incréments d'inertie de la Terre solide venant en partie compenser l'excitation due à ces couches fluides.

4.6 Influence de l'élasticité sur la longueur du jour

La vitesse de rotation de la terre $\Omega(1 + m_3)$ est régie par l'équation (3.19), où l'incrément d'inertie axial c_{33} contient une partie d'origine centrifuge I_{33}^c induite par la variation de vitesse de la rotation, et donné par l'équation (4.33). En reportant I_{33}^c dans l'équation (3.19), nous obtenons :

$$\dot{m}_3 = -\frac{k_2 \frac{4R_e^5}{9G} \Omega^2 \dot{m}_3}{C} - \frac{\dot{c}_{33}^{pure}}{C} - \frac{\dot{h}_3}{C\Omega} + \frac{L_3}{C\Omega} \quad (4.37)$$

où c_{33}^{pure} est l'incrément d'inertie de la Terre affranchi de l'effet centrifuge. La trace de la matrice d'inertie est constante. Finalement l'équation précédente se réduit à :

$$\dot{m}_3 \left(1 + \frac{\frac{4k_2 R_e^5}{9G} \Omega^2}{C}\right) = -\frac{\dot{c}_{33}^{pure}}{C} - \frac{\dot{h}_3}{C\Omega} + \frac{L_3}{C\Omega} = \dot{\psi}_3^{pure} \quad (4.38)$$

où le terme $\frac{4k_2 R_e^5}{9G}$ peut être réécrit $\frac{4}{3} \frac{k_2}{k_s} (C - A)$ et l'on a :

$$\dot{m}_3 = \frac{\dot{\psi}_3^{pure}}{1 + \frac{4(C-A)k_2}{3Ck_s}} \quad (4.39)$$

Par intégration, nous obtenons :

$$m_3 = \frac{\psi_3^{pure}}{1 + \frac{4(C-A)k_2}{3Ck_s}} + C^{te} \quad (4.40)$$

La fonction d'excitation "pure" est divisée par 1.0013 et voit sa valeur diminuée de 0.15%, ce qui est négligeable au regard de la médiocre précision (supérieure à 1%) avec laquelle on détermine ou modélise les composantes de la fonction d'excitation axiale.

4.7 Anélasticité

Si la Terre était parfaitement élastique, il n'y aurait aucune dissipation, et le mouvement du pôle pourrait entrer en résonance avec la moindre excitation géophysique à la période de Chandler. Or le terme de Chandler garde une amplitude modérée inférieure à 0.5". Depuis 1900 on a observé sa décroissance voire sa quasi-disparition vers 1925-1930, puis sa reprise à partir des années 1940. Cela signifie que, bien qu'il apparaisse comme un mode libre de rotation, il est amorti : il ne pourrait se maintenir et augmenter s'il n'était excité par quelque processus variable. De l'existence d'un amortissement nous concluons à une perte d'énergie. Il faut donc que les déformations centrifuges engendrées par le mode libre ne soient pas idéalement élastiques, mais soient accompagnées par une dissipation sous forme de chaleur dans les différentes couches de la Terre. Cette *anélasticité* se traduit par le fait que les variations centrifuges des moments d'inertie c et c_{33} se produisent avec un certain retard $\delta\tau$ par rapport à la polhodie. La composante équatoriale de la fonction d'excitation centrifuge s'écrit alors :

$$\Psi^c(t) = \frac{k_2}{k_s} m(t - \delta\tau) \quad (4.41)$$

soit dans le domaine de Fourier :

$$\Psi^c(\sigma) = \frac{k_2}{k_s} e^{-i\sigma\delta\tau} m(\sigma) \quad (4.42)$$

Donc la polhodie à la fréquence σ (principalement à la fréquence de Chandler) produit l'excitation :

$$\Psi_\sigma^c(t) = \frac{k_2}{k_s} e^{-i\sigma\delta\tau} m_\sigma(t) \quad (4.43)$$

Nous introduisons alors le nombre de Love complexe :

$$k_2^* = k_2 e^{-i\sigma\delta\tau} \quad (4.44)$$

Nous savons que 90 % des fluctuations du pôle se trouvent à 432 et 365 jours, soit $\sigma \approx \frac{\Omega}{432}$, dans ces conditions la déformation retarde au plus de quelques jour sur sa cause, soit $\delta\tau \approx 2\pi/\Omega$. On a donc $\sigma\delta\tau \approx 2\pi/432$, et c'est pourquoi $k_2^* \approx k_2(1 - i\sigma\delta\tau)$. Nous pouvons donc écrire :

$$k_2^* = k_2(1 + \kappa) \quad (4.45)$$

où $\kappa \leq 0$ dépend à priori de la fréquence envisagée dans le mouvement du pôle. Si le retard est de l'ordre du jour, le coefficient qui rendra compte de la déformation principale est

$$\kappa = -k_2\sigma\delta\tau \approx -2\pi/432 k_2 \approx -4 \cdot 10^{-3}. \quad (4.46)$$

Les développements du paragraphe 4.5 consacrés au cas purement élastique restent valides pourvu de remplacer le nombre de Love réel k_2 par le complexe k_2^* . Nous en concluons que la polhodie, pour une Terre anélastique, suit l'équation différentielle :

$$m + \frac{i}{\sigma_c^*} \dot{m} = \frac{\psi^{pure}}{1 - \frac{k_2^*}{k_s}} \quad (4.47)$$

où σ_c^* est la pulsation complexe :

$$\sigma_c^* = \sigma_c + i\alpha \quad (4.48)$$

avec

$$\alpha = -\sigma_e \frac{\kappa}{k_s} \left(1 + \frac{C - A}{A}\right) \quad (4.49)$$

Nous voyons que α est positif, ce qui implique que le mouvement libre, s'exprimant dans le plan complexe par

$$m(t) = m_0 e^{i\sigma_c^*(t-t_0)} = m_0 e^{i\sigma_c(t-t_0)} e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (4.50)$$

est amorti. Si nous adoptons la valeur de κ ci-dessus, $\alpha = 10^{-9}$ s, et l'amplitude du mode libre est divisée par e au bout du temps (dit de relaxation) $1/\alpha \approx 30$ ans.

Dans le cas anélastique, la fonction d'excitation géophysique effective est :

$$\Psi^{geoph.} = \frac{\psi^{pure}}{1 - \frac{k_2^*}{k_s}} \left(1 + i \frac{\kappa}{k_s}\right) \quad (4.51)$$

et comme $\kappa \leq 0$, elle se trouve donc légèrement décalée de l'angle positif $-\frac{\kappa}{k_s} \approx 1^\circ$ dans le plan équatorial par rapport à l'excitation originelle. En fait, l'observation du mouvement

du pôle permet de déterminer le paramètre α pour la fréquence de Chandler. Nous le montrons ci-après.

Si le mode est amorti et suit la loi $m(t) = Y(t-t_0)m_0e^{i\sigma_c(t-t_0)}e^{-\alpha(t-t_0)}$, où $Y(t-t_0)$ est la fonction Heaviside débutant en t_0 , alors on montre aisément que sa puissance spectrale est :

$$|m(\sigma)|^2 = \frac{4\pi^2 m_0^2}{\alpha^2 + (\sigma - \sigma_c)^2} \quad (4.52)$$

Pour la pulsation de Chandler on obtient $|m(\sigma_c)|^2 = \frac{4\pi^2 m_0^2}{\alpha^2}$. Nous voyons qu'un tel spectre est symétrique autour de la fréquence de résonance. On peut s'intéresser aux deux pulsations $\sigma^- = \sigma_c - \frac{\Delta\sigma}{2}$ et $\sigma^+ = \sigma_c + \frac{\Delta\sigma}{2}$ pour lesquelles la puissance spectrale ne vaut plus que la moitié de sa puissance centrale. En traduisant cette condition, on trouve que la "largeur à demi-hauteur" vaut $\Delta\sigma = 2\alpha$ et que le pic spectral est donc d'autant plus large que l'amortissement est élevé. On définit usuellement le facteur de qualité Q du pic spectral par le rapport de la pulsation centrale à la largeur à mi-hauteur, soit $Q = \frac{\sigma_c}{\Delta\sigma} = \frac{\sigma_c}{2\alpha}$ ²

Lorsque on examine le spectre de puissance du mouvement du pôle, on voit que le pic à la fréquence de Chandler, largement prédominant, est élargi et symétrique (voir Fig. 4.1). Nous sommes donc en droit d'assimiler le mode libre à une oscillation sinusoïdale amortie, et de déduire le coefficient d'amortissement ou le facteur de qualité de la largeur à mi-hauteur du pic spectral. Toutes les études s'accordent pour dire que le facteur de qualité du terme de Chandler s'échelonne entre 70 et 180. Si nous prenons $Q = 100$, de l'expression $\alpha = \frac{\sigma_c}{2Q} = -\sigma_e \frac{\kappa}{k_s} (1 + \frac{C-A}{A})$ nous tirons :

$$\kappa = -\frac{k_s}{2Q} \frac{\sigma_c}{\sigma_e} \quad (4.53)$$

soit $-4,710^{-3} \leq \kappa \leq -1,6510^{-3}$. La polhodie chandlérienne précéderait donc la déformation centrifuge d'une durée $\delta\tau = |\kappa|/(k_2\sigma_c)$ comprise entre 1 et 0.37 jour.

²La définition originelle du facteur de qualité d'un signal pseudo-périodique est $\frac{1}{Q} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{E}$ où $\frac{\Delta E}{E}$ est la dissipation relative d'énergie au cours d'un cycle. Dans où le cas le signal se comporte selon la loi (4.50), on montre aisément que $Q = \frac{\sigma_c}{2\alpha}$. Q est d'autant plus grand que la dissipation en énergie est faible, ou autrement dit que l'amortissement est léger.

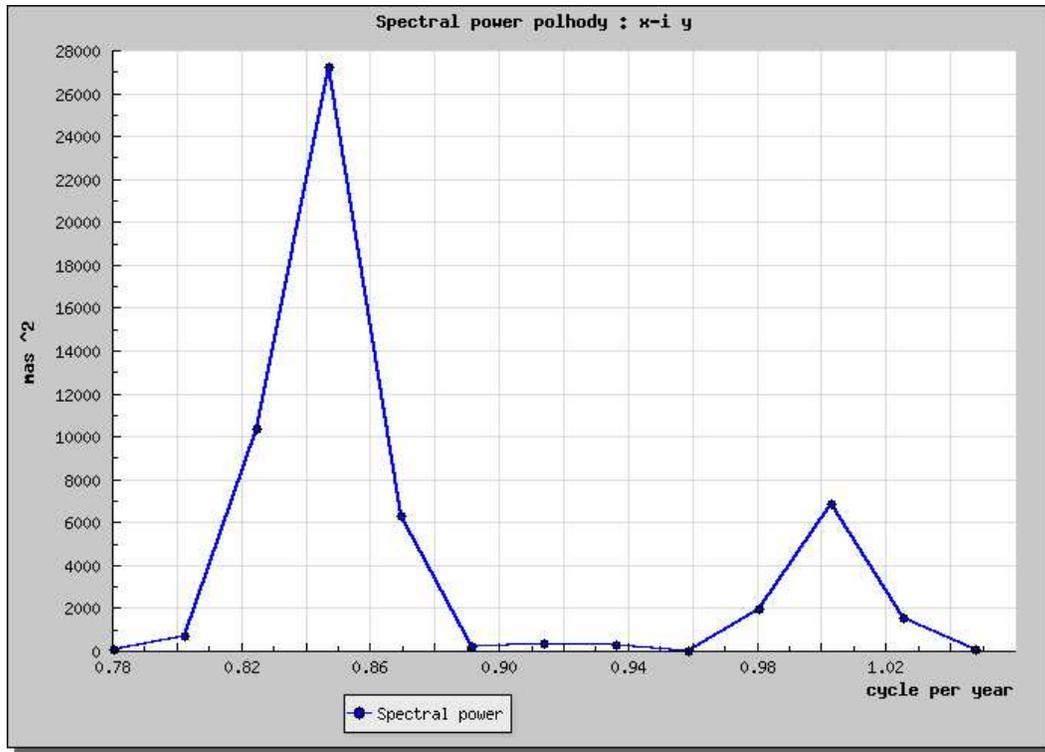


FIG. 4.1 – Spectre de puissance du mouvement du pôle autour de la fréquence de Chandler (0.845 cycle par an).

Chapitre 5

Effet de l'atmosphère et des océans

5.1 Excitations géophysique

Nous avons vu comment les propriétés physiques de la Terre diminuaient la fréquence du mode libre, et l'amortissaient. Mais l'excitation géophysique est restée indéfinie. La plus puissante est celle produite par les redistributions de masses dans les *couches fluides superficielles*, l'atmosphère et les océans. C'est précisément l'objet du présent chapitre de caractériser leur impact sur la rotation terrestre. A proprement parler ces deux couches sont couplées, car la surface océanique est déformée sous l'action des variations de pression atmosphériques. Pour traiter l'effet d'un processus géophysique, divers systèmes mécaniques peuvent être envisagés : (1) Terre solide ; (2) Terre solide + océans + atmosphère ; (3) manteau + lithosphère ; (4) manteau + lithosphère + atmosphère + océans ; (5) lithosphère. Selon le système envisagé, un processus excitatif se manifeste dans la fonction d'excitation sous trois formes possibles :

- incréments des moments d'inertie du système I_{13} et I_{23} .
- apparition d'un moment cinétique relatif (h_1, h_2, h_3)
- moment de force externe ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$)

Pour traiter l'effet atmosphérique ou océanique, on préfère généralement considérer le système (2) ou (4) incluant la couche fluide considérée, qui se manifeste alors par des incréments d'inertie et des moments cinétiques relatifs. L'avantage de cette approche, c'est qu'elle se fonde essentiellement sur l'observation des redistributions de masse, et évite la modélisation des forces d'interaction entre le système mécanique (Terre solide ou l'une de ses parties) et la couche superficielle. Le couplage est alors envisagé sous la forme d'un échange de moment cinétique interne, et non pas sous celle d'un moment de force externe.

Les autres phénomènes susceptibles d'influencer la rotation terrestre sont :

- le cycle saisonnier dans le contenu en eaux douces des continents
- l'interaction noyau-manteau
- les variations du niveau des glaces continentales
- les tremblements de Terre de magnitude 9 et plus

Il existe bien d'autres processus d'ampleur planétaires : la pression de radiation solaire, les tempêtes géomagnétiques, le dégagement permanent de chaleur par le noyau... ; mais ils sont soit trop peu énergétiques ou trop peu efficaces d'un point de vue mécanique pour influencer de manière décelable la rotation terrestre.

Les déplacements de masses d'air ou d'eau ne pourrait avoir lieu sans l'action du soleil ou de la lune. Il faut distinguer :

- l'effet de la *marée gravimétrique luni-solaire*, responsable de la *marée océanique* (de l'ordre du mètre en pleine mer) et de la *marée barométrique*, soit environ 10% des fluctuations de pression-atmosphérique.
- l'effet du *chauffage solaire* : les contrastes thermiques, principalement diurne et saisonnier, engendrent des redistributions d'eau et d'air, se superposant aux marées.

Nous n'aborderons pas l'influence des marées océaniques, laquelle peut être découplée des mouvements d'origine thermique et estimée à part. On sait que les marées océaniques se déploient avant tout à des fréquences diurnes et semi-diurnes, en causant :

- des perturbations sur la nutation ≈ 1 mas (partie rétrograde diurne de la fonction d'excitation) ;
- des oscillations diurnes et semi-diurnes sur le mouvement du pôle : 0.2 mas ;
- sur oscillations diurnes et semi-diurnes de la longueur du jour : 10 μ s

A contrario il est fort malaisé d'estimer l'effet de la marée barométrique, et les mesures de la pression atmosphérique au sol englobent la totalité des fluctuations barométriques qu'elles soient thermiques ou gravimétriques. Dans la pratique les deux effets sont traités conjointement.

5.2 Nature du couplage entre une couche fluide et la Terre solide

Le moment de force luni-solaire sur le bouelet équatorial de la Terre, 10^{23} N m dans sa partie moyenne, est réglé par les mouvements orbitaux, que l'on connaît, modélise et prédit avec une précision d'horloger. C'est pourquoi la précession-nutation, bien que légèrement affectée par la structure interne de la Terre et sa rhéologie, est très bien cernée, à une milliseconde de degré près par le modèle conventionnel IAU 2000 (adopté par l'Union Astronomique International en 2000). Le couplage, de surcroît, est volumique, et sa cause est purement gravitationnelle.

Le couplage entre une couche fluide superficielle et la Terre solide s'avère beaucoup plus délicat à déterminer. Du fait même que l'atmosphère ou les océans ne se comportent pas de manière prédictible au delà de quelques jours, il est impossible de dresser un modèle prédictif des forces que ces couches exercent sur la Terre solide. De plus le couplage est avant tout surfacique : les forces de pression qui ne passent par le centre de gravité de la Terre, créent en chaque point de la surface un moment de force, et comme le champ de pression n'est pas uniforme l'ensemble de ces moments élémentaires ont une résultante non nulle. L'augmentation de la pression en un point donné de la surface (du plancher océanique) correspond à une accumulation de masse d'air (d'eau), qui exerce en retour une force de gravitation accrue sur la Terre solide, s'opposant à l'incrément de force de pression. Nous prévoyons donc l'existence d'un couplage gravitationnel entre la Terre solide et l'atmosphère (les océans) venant compenser les effets de la pression. La troisième type d'interaction est la friction (viscosité), beaucoup plus difficile à modéliser que les deux précédentes.

En résumé le moment de force d'interaction des couches fluides sur la Terre solide se décompose en trois termes :

- un terme de pression provient du poids de la colonne verticale d'air ou d'eau sur la surface de la Terre solide ;

- un terme de gravitation est dû à l'attraction exercée par les masses atmosphériques ou océaniques sur les masses solides de la Terre ;

- un terme de friction est associé aux frottements produits par les vents en surface ou par les courants marins sur le plancher océanique.

Les moments de force de pression et de gravitation se calculent par des intégrales de surface, nécessitant de connaître la pression au sol ou au fond des océans. L'expression analytique du terme de pression est :

$$\vec{\Gamma}_p = - \int_{surface} \vec{r} \times P_s \hat{n} dS \quad (5.1)$$

où \vec{r} est le rayon, P_s , la pression à la surface de la Terre solide, \hat{n} , le vecteur unitaire normal sortant à la surface de la Terre, soit :

$$\vec{\Gamma}_p = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} R_e^2 h \left(\frac{\partial P_s}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \end{pmatrix} + \frac{\partial P_s}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right) d\theta d\lambda \quad (5.2)$$

où h est la hauteur du relief par rapport au rayon équatorial R_e , θ et λ , la colatitude et la longitude, g , l'accélération moyenne de la pesanteur, Φ , le potentiel de gravitation terrestre. Le terme de gravitation s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_g = \int_{volume\ de\ fluide} \vec{r} \times \vec{\nabla} \Phi \rho dV \quad (5.3)$$

où ρ est la densité du fluide, soit, après l'approximation dite de "couche mince" et d'équilibre hydrostatique :

$$\vec{\Gamma}_g = \frac{a^2}{g} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Phi \left(\frac{\partial P_s}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \end{pmatrix} + \frac{\partial P_s}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right) d\theta d\lambda \quad (5.4)$$

Quant au moment de friction, il s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_f = \int_{surface} \vec{r} \eta \hat{n} \cdot \nabla \vec{v}_s dS \quad (5.5)$$

où η est un paramètre de viscosité et \vec{v}_s est la vitesse relative du fluide à la surface de la Terre ou sur le plancher océanique. Ces expressions sont démontrées dans [4].

Cette analyse a été développée dans la décennie 1990, des séries temporelles de moments de forces atmosphériques ont été calculées. Mais la force de friction restant mal déterminée, cette méthode est restée académique, et n'est pas appliquée pour déterminer de manière routinière l'impact de l'atmosphère ou des océans sur la rotation terrestre (en se fondant sur les équations d'Euler-Liouville restreintes à la partie solide de la Terre). On préfère la méthode dite du moment cinétique où la couche fluide fait partie du système mécanique, et excite la rotation terrestre par l'intermédiaire de ces incréments d'inertie I_{ij} et des moments cinétiques relatifs h_i , que l'on calcule à partir des observations météorologiques ou océanographiques, sans pour autant déterminer les forces qui les induisent.

5.3 Fonction d'excitation d'une couche fluide et moment cinétique de cette couche

D'après le chapitre 3, Eq. (3.11), le moment cinétique d'une couche quelconque de la Terre ou de celle-ci prise dans sa globalité, peut toujours être séparé en deux termes :

- le premier est associé à la rotation rigide de la-dite couche avec la Terre à la vitesse de rotation $\vec{\omega}$, et s'exprime comme le produit du tenseur d'inertie de cette partie avec le vecteur instantané de rotation de la Terre ; on l'appelle généralement terme de "matière" ;
- le second terme est le moment cinétique relatif de cette couche par rapport à la croûte terrestre ; on l'appelle terme de "mouvement" \vec{h}^f .

Soient \underline{I}^f la matrice d'inertie de cette partie couche, le terme de matière s'écrit :

$$[H^f] = \underline{I}^f[\omega]$$

soit :

$$[H^f] = \Omega \begin{pmatrix} I_{11}^f m_1 + I_{12}^f m_2 + I_{13}^f (1 + m_3) \\ I_{12}^f m_1 + I_{22}^f m_2 + I_{23}^f (1 + m_3) \\ I_{13}^f m_1 + I_{13}^f m_2 + I_{33}^f (1 + m_3) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Si les moments d'inertie de la couche sont petits par rapports à ceux de la Terre globale, ce qui est le cas de l'atmosphère et des océans (un millionième au plus), on obtient après suppression des termes du second ordre :

$$[H^f] \approx \Omega \begin{pmatrix} I_{13}^f \\ I_{23}^f \\ I_{33}^f \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Pour une couche fluide, représentant une faible proportion de la masse de la Terre, le calcul des moments d'inertie hors-diagonaux I_{13}^f , I_{23}^f et du moment d'inertie axial I_{33}^f s'apparente donc à celui du terme matière du moment cinétique de ce fluide. Dans les équations d'Euler-Liouville interviennent plus expressément les *fonctions de moment cinétique de matière* :

$$\chi^{mat} = \frac{I_{13}^f + iI_{23}^f}{C - A} = \frac{I^f}{C - A} \quad (5.8)$$

$$\chi_3^{mat} = \frac{I_{33}^f}{C} \quad (5.9)$$

et les fonctions de moment cinétique de mouvement :

$$\chi^{mv} = \frac{h^f}{(C - A)\Omega} \quad (5.10)$$

$$\chi_3^{mv} = \frac{h^3}{C\Omega} \quad (5.11)$$

5.4 Equation d'Euler-Liouville pour une Terre anélastique

Le système mécanique que nous envisageons comprend la Terre et ses couches fluides superficielles. En considérant que la partie solide de la Terre est anélastique, l'effet des excitations fluides sur le mouvement du pôle se traduit alors par l'équation (4.47) :

$$m + \frac{i}{\sigma_c^*} \dot{m} = \frac{\Psi^f}{1 - \frac{k_2^*}{k_s}} \quad (5.12)$$

avec $\sigma_c^* = \sigma_c[1 + i/(2Q)]$ et Ψ^f la fonction d'excitation donnée par :

$$\Psi^f = \chi^{mat} + \chi^{mv} - \frac{i}{\Omega}(\dot{\chi}^{mat} + \dot{\chi}^{mv}) \quad (5.13)$$

Les fonctions de moment cinétique matière ou les moments d'inertie correspondant ont une moyenne non-nulle, correspondant à la distribution moyenne du fluide. Cette moyenne, dont on peut supposer qu'elle existe depuis des temps immémorables, ou tout au moins depuis plusieurs années, a en fait un impact définitif sur le mouvement du pôle (décalage constant et contribution sur le terme de Chandler amortie à l'heure actuelle). Seule la partie variable, susceptible de provoquer un mouvement actuel est d'intérêt. **Dans ce qui suit, les fonctions d'excitations ou de moment cinétiques sont considérées uniquement dans leur partie variable.**

Lorsque la pression du fluide en surface augmente (diminue) en une zone donnée, celle-ci se creuse (bombe), ce qui donne lieu à une diminution (augmentation) des moments d'inertie de la Terre solide. De manière générale, toute variation des moments d'inertie de la couche fluide δI^f (par rapport à sa valeur moyenne) est accompagnée par une variation opposée I^{charge} des moments d'inertie de la Terre solide selon la relation de proportionnalité :

$$I_{charge} = k_2' \delta I^f \quad (5.14)$$

où $k_2' \approx -0.3$ est le nombre de Love dit de déformation. Nous admettons cette expression, qui est analogue à celle donnant l'incrément d'inertie sous l'action du potentiel centrifuge. L'effet de déformation compense partiellement l'incrément de moment d'inertie qui l'a fait naître. La fonction d'excitation (partie variable) se réécrit donc :

$$\Psi^f = (1 + k_2')\chi^{mat} + \chi^{mv} - \frac{i}{\Omega}[(1 + k_2')\dot{\chi}^{mat} + \dot{\chi}^{mv}] \quad (5.15)$$

et la partie équatoriale de l'équation d'Euler-Liouville devient :

$$m + \frac{i}{\sigma_c^*} \dot{m} = \chi^{mat\ eff} + \chi^{mv\ eff} - \frac{i}{\Omega}(\dot{\chi}^{mat\ eff} + \dot{\chi}^{mv\ eff}) \quad (5.16)$$

fondée sur les *fonctions effectives de moment cinétique équatorial* :

$$\chi^{mat\ eff} = \frac{1 + k'_2}{1 - k_2/k_s} \chi^{mat} \quad \chi^{mv\ eff} = \frac{1}{1 - k_2/k_s} \chi^{mv} \quad (5.17)$$

D'après les valeurs des nombres de Love donnés en Annexe 2 ($k_2 = 0.3, k_s = 0.9883, k'_2 = -0.3075$), on obtient :

$$\chi^{mat\ eff} \approx 1,02 \chi^{mat} \quad (5.18)$$

$$\chi^{mv\ eff} \approx 1,47 \chi^{mv} \quad (5.19)$$

En réalité l'équation (5.16) régissant le mouvement du pôle sous l'action d'une couche fluide est impropre pour une excitation diurne ou subdiurne ¹. En effet à cette échelle de temps, le noyau fluide provoque une oscillation libre rétrograde, quasi-diurne ($-1 - 1/433$ cycle par jour) de l'axe de rotation du manteau. Autrement dit il existe une résonance, qui amplifie l'effet de toute excitation dont la fréquence approche $-1 - 1/433$ cycle par jour. **Cependant, dans ce qui suit, nous ne traiterons que l'impact des redistributions de masses se déroulant sur plusieurs jours, pour lesquelles l'équation (5.16) est tout à fait adéquate.**

Pour les variations de la vitesse axiale, nous avons vu que les effets de déformation centrifuge étaient petits (0,15%) : ils peuvent être négligés au regard de la précision, souvent indéterminée, des fonctions d'excitation atmosphérique et océanique. En bonne approximation, la vitesse de rotation est alors réglée comme celle d'un corps rigide selon :

$$\dot{m}_3 = -\dot{\Psi}_3^f \quad (5.20)$$

avec $\Psi^f = \chi_3^{mat} + \chi_3^{mv}$. Cependant, l'élasticité entraîne une autre déformation, celle due à la charge variable du fluide, ajoutant à l'excitation le terme $k'^2 \chi_3^{mat}$. Au bout du compte, on a :

$$m_3 = -\chi_3^{mat\ eff} - \chi_3^{mv\ eff} + \text{Cte} \quad (5.21)$$

avec les fonctions effectives

$$\chi_3^{mat\ eff} = (1 + k'^2) \chi_3^{mat} \approx 0,70 \chi_3^{mat} \quad (5.22)$$

$$\chi_3^{mv\ eff} = \chi_3^{mv} \quad (5.23)$$

L'écart de la longueur du jour est une quantité plus appréhensible, et d'après l'équation (2.2) les couches fluides la modifient selon l'équation :

$$\frac{\Delta LOD}{LOD} = \chi_3^{mat\ eff} + \chi_3^{mv\ eff} + \text{Cte} \quad (5.24)$$

5.5 Excitation atmosphérique

Le moment cinétique atmosphérique $[H^A] + [h^A] = [\Omega I_{13}^A, \Omega I_{23}^A, \Omega I_{33}^A] + [h^A]$, fait l'objet de déterminations journalières. Les observations météorologiques (pression-vent) ne rendent compte de la répartition des masses d'air et de leur mouvement que partiellement. Pour calculer une quantité globale comme un moment cinétique, il faut mettre en oeuvre un modèle numérique pour "interpoler" l'état de l'atmosphère là où ne l'observe pas.

¹néologisme signifiant de période inférieure à 24 heures

5.5.1 Influence des variations de pression atmosphérique.

On explicite les moments d'inertie I_{13}^A et I_{23}^A dans le repère terrestre en coordonnées sphériques (r, λ, θ) (rayon, longitude, colatitude) en faisant deux approximations consécutives :

- tout élément de volume de l'atmosphère est en équilibre hydrostatique, ce qui permet, dans les intégrales volumiques, de substituer à l'élément différentiel dr la différentielle de pression, puisque $dp = -\rho g dr$ (ρ est la masse volumique, g le champ de pesanteur) ;
- l'épaisseur de la couche fluide étant très inférieure au rayon terrestre, elle est prise comme constante égale au rayon équatoriale.

On aboutit aux expressions suivantes pour le terme de matière, rebaptisé alors terme de pression $[H^p]$, dans le repère terrestre :

$$[H^p] = -\frac{R_e^A}{g} \Omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} P_s \sin^2 \theta \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta d\lambda \quad (5.25)$$

où R_e est le rayon équatorial de la Terre, Ω , la vitesse angulaire de la Terre, g , la pesanteur moyenne et P_s , la pression de l'air au sol. Les moments d'inertie se retrouvent réduits à des intégrales surfaciques d'une fonction déterminée par la pression atmosphérique.

L'atmosphère représente environ un millionième de la masse de la Terre ($M_A \approx 5,2 \cdot 10^{18}$ kg), ordre de grandeur que l'on obtient facilement à partir de la pression moyenne atmosphérique au sol, 10^5 Pa donnant la masse d'une colonne d'air par mètre carré, soit $dm = 10^5/g \approx 10^4$ kg. Les moments d'inertie de l'atmosphère représente donc au plus $10^{-6}A$.

Dans l'atmosphère les variations de la pression atmosphérique moyenne en surface sont saisonnières. Sur la planisphère de la Fig. 5.1 sont reportées, en g/cm² (ou 10 kg/m², équivalent à 100 Pa), les variations des masses d'air de juillet à janvier. Ses valeurs extrémales sont atteintes sur les continents, soit 20 g/cm², ou 2% de la pression atmosphérique. A contrario la pression ne varie pratiquement pas sur les océans. On notera que l'accumulation de masse d'air sur l'hémisphère nord en hiver est accompagnée par des dépressions dans l'hémisphère sud. Le phénomène s'inverse en été.

Les variations relatives des moments d'inertie atmosphérique sont donc au plus de quelques % : leur partie variable c_{ij}^A atteint donc $0,01 \cdot 10^{-6}A = 10^{-8}A \leq 10^{30}$ kg m².

Dans l'équation d'Euler-Liouville intervient donc une fonction d'excitation équatoriale, saisonnière, de l'ordre de $10^{-8}A/(C - A) = 3 \cdot 10^{-6}$ rad et nous prévoyons un effet comparable sur le pôle, confinant $1'' (= 5 \cdot 10^{-6}$ rad).

La fonction d'excitation axiale c_{33}/C , tout au plus $10^{-8}A/C = 10^{-8}$ rad, influence la longueur du jour à la hauteur de $10^{-8} * 86400 = 0.001$ s = 1 ms au plus d'après l'Eq. (5.24).

Ces ordres de grandeur sont confirmés par les calculs météorologiques de $[H^p]$, qui s'appuient sur l'expression (5.25). A partir d'une réanalyse globale des données météorologiques de 1948 à 2005, le NCEP (National Center for Environmental Prospect, USA) et le NCAR (National Center for Atmospheric Research, USA) ont calculés le moment

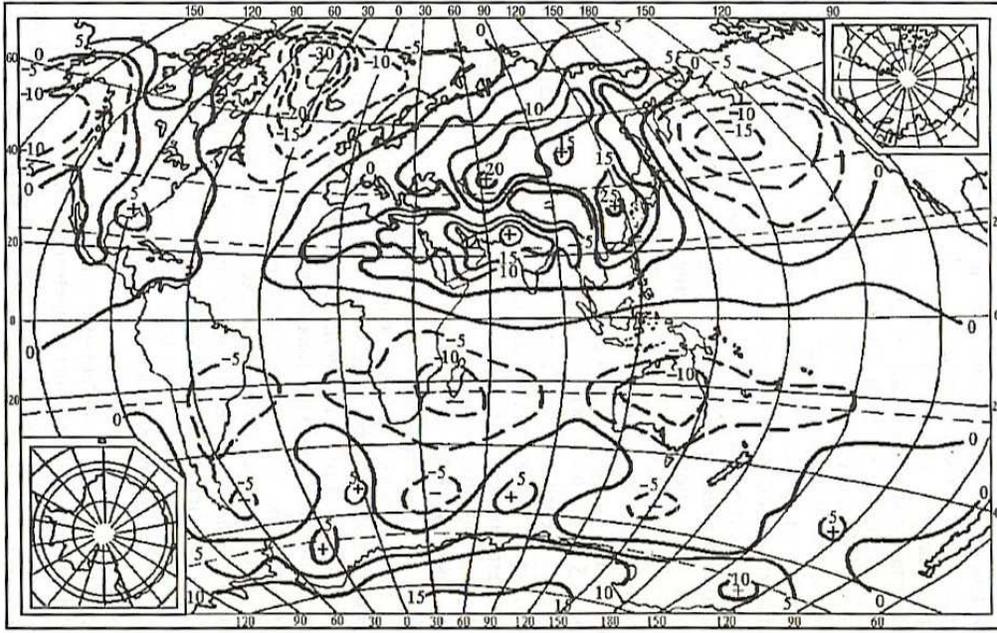


FIG. 5.1 – Variations des masses d’air de juillet à janvier par unité de surface terrestre en g/cm^2 (ou 10 kg/m^2 , équivalent à 100 Pa). Les valeurs extrémales sont atteintes sur les continents et correspondent à quelques % de la pression atmosphérique (Sidorenkov, 2002, p. 161[5])

cinétique atmosphérique toutes les 6 heures (0hTU, 6hTU, 12hTU, 18hTU). Nous avons figuré ces données sur la Figure 5.4 de 2002 à 2004 : notons dans les trois composantes du terme de pression (en $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$) la parfaite visibilité du cycle saisonnier pour chacune des composantes du terme de pression, de l’ordre de $5 \cdot 10^{24} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$, ainsi que pour la composante axiale du terme vent ($50 \cdot 10^{24} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$).

5.5.2 Influence des vents.

Pour le moment cinétique relatif causé par les vents, appelé alors *terme vent* (indice v), l’approximation de couche mince demeure, mais la réduction de l’intégrale volumique à une intégrale de surface n’est plus possible. On obtient :

$$[h^A] = R_e^3 \int_{h=0}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin \theta \begin{pmatrix} v_\theta \sin \lambda + v_\lambda \cos \theta \cos \lambda \\ -v_\theta \cos \lambda + v_\lambda \cos \theta \sin \lambda \\ -v_\lambda \sin \theta \end{pmatrix} \rho \, dh \, d\theta \, d\lambda \quad (5.26)$$

où v_λ et v_θ sont les vitesses relatives respectivement longitudinales et méridionales (du nord vers le sud), calculées pour chaque surface isobare P_S . L’hypothèse de l’équilibre hydrostatique conduit à l’expression :

$$[h^A] = \frac{-R_e^3}{g} \int_0^{P_S} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin \theta \begin{pmatrix} v_\theta \sin \lambda + v_\lambda \cos \theta \cos \lambda \\ -v_\theta \cos \lambda + v_\lambda \cos \theta \sin \lambda \\ -v_\lambda \sin \theta \end{pmatrix} dP \, d\theta \, d\lambda \quad (5.27)$$

L’une des caractéristiques principales des vents, c’est la présence d’une circulation globale de l’ouest vers l’est, maximale dans les zones tempérées et pratiquement nulle dans

les zones polaires et équatoriale. Ces vents "zonaux" sont quasi-inexistants à la surface, mais deviennent significatifs dans les zones tempérées à partir de 10 km d'altitude et atteignent leur maximum, jusqu'à 30 m/s, vers 12 km d'altitude (voir Fig. 5.2). Les couloirs aériens empruntent ces zones de "jet-stream" pour les vols vers l'est (le gain de temps atteint quelques heures pour un vol long-courrier).

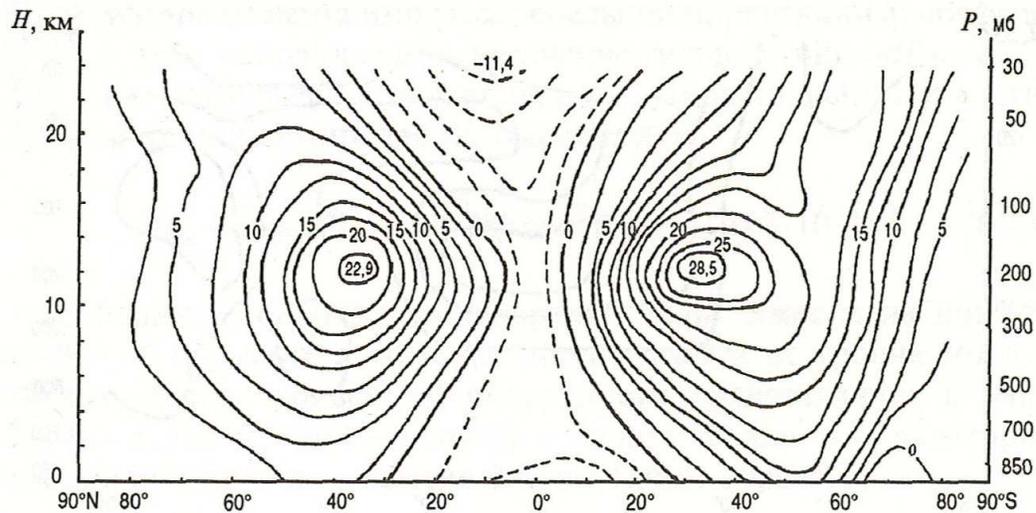


FIG. 5.2 – Section méridienne de la moyenne annuelle des vitesses des vents zonaux (m/s). Altitude en km, surface isobarre en mbar. Valeurs positives vers l'est (Sidorenkov, 2002, p. 197 [5]).

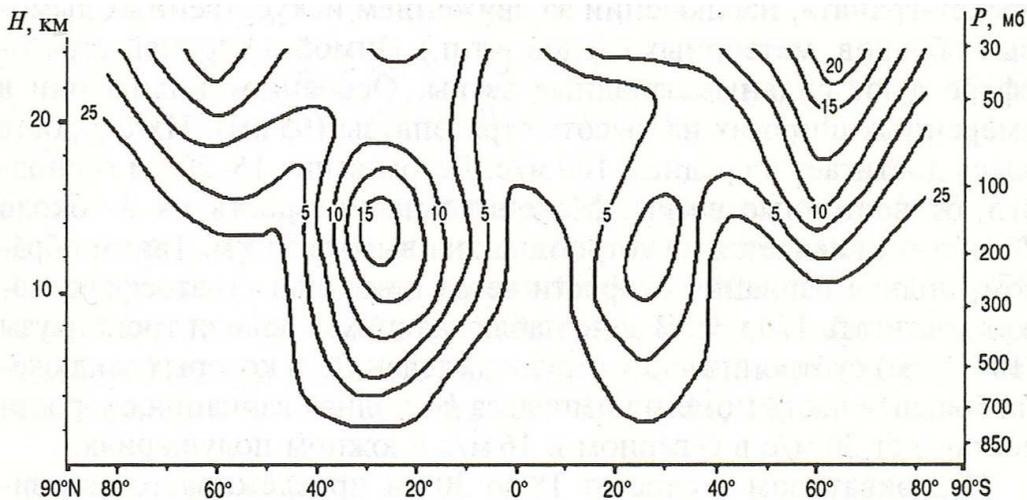


FIG. 5.3 – Section méridienne de l'oscillation annuelle dans la vitesse des vents zonaux (m/s). Altitude en km, surface isobarre en mbar (Sidorenkov, 2002, p. 197 [5]).

En moyenne l'atmosphère présente un état de super rotation, et l'on peut calculer que le moment cinétique relatif de l'atmosphère possède une composante axiale moyenne, de l'ordre de $\bar{h}_3 \approx 144 \cdot 10^{24} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ (d'après Sidorenkov, 2002, voir aussi Fig. 5.4). A

titre de comparaison le moment cinétique de l'atmosphère, du à sa rotation en bloc est $10^{-6}C\Omega \approx 6 \cdot 10^{27} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$.

La super-rotation moyenne en soi n'est que de peu d'importance pour le but que nous poursuivons : seules les variations de moments cinétiques sont susceptibles d'induire un effet sur la rotation. Or les vents zonaux présentent une variation annuelle très prononcée, jusqu'à 10 m/s, comme l'illustre la Fig. 5.3, et la composante axiale du moment cinétique relatif présente une fluctuation annuelle de $\Delta h_3^{saison.} \approx 20 \cdot 10^{24} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ (voir Fig. 5.4), soit 5% de sa moyenne. Il en résulte une fonction d'excitation axiale $\Delta h_3^{saison.}/C\Omega \approx 4 \cdot 10^{-9}$, à laquelle correspond une variation annuelle de la longueur du jour égale à $3 \cdot 10^{-9} * 86400 \text{ s} \approx 0,3 \text{ ms}$ (0,6 ms pic à pic).

Les vents induits par le cycle thermique diurne ne se compensent pas à l'échelle planétaire et donnent naissance à une oscillation diurne du moment cinétique relatif, affectant différemment composantes axiale et équatoriale. Pour la partie équatoriale : $\Delta h^{diurne} \approx 5 \cdot 10^{24} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$, et pour la composante axiale $\Delta h_3^{diurne} \approx 0,5 \cdot 10^{24} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$.

5.6 Excitation océanique

5.6.1 Modèle d'océan statique barométrique (IB)

On ne peut pas considérer l'influence de l'atmosphère sur la Terre solide sans tenir compte de la réaction des océans aux variations de pression atmosphérique et aux vents en surface. En effet, l'atmosphère induit des courants marins et des changements dans la hauteur d'eau.

Un océan statique est un océan dont les eaux n'ont aucun mouvement global relativement à la Terre solide. Le moment cinétique océanique induit par l'atmosphère ne comporte que le terme de pression (pression de l'eau sur le plancher océanique). On impose là une condition réductrice, mais fort intéressante par les simplifications qu'elle apporte. On suppose alors que les océans ne peuvent présenter que deux réactions possibles face aux variations de pression atmosphérique. Une première hypothèse stipule que l'océan réagit comme un baromètre inversé (en anglais Inverted Barometer), c'est à dire que la pression totale (air + eau) sur le plancher océanique reste invariante. Si la pression atmosphérique à la surface augmente, c'est la hauteur d'eau qui diminue pour compenser cet incrément. On admet alors que l'eau déplacée se répartit sur toute la surface immergée du globe mais de façon si lente que le moment cinétique relatif associé à cette redistribution demeure négligeable. Autrement dit, pour que le modèle IB soit valide, la redistribution d'eau doit être lente. En effet l'observation a montré que la réaction IB constitue une approximation honorable pour des périodes supérieures à 10 jours. L'hypothèse IB équivaut à réduire l'intégrale de surface (5.25) donnant le terme de pression aux continents. Il se réécrit comme :

$$[H^A] = -\frac{R_e^4}{g} \Omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} f(\lambda, \theta) P_s \sin^2 \theta \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta d\lambda \quad (5.28)$$

où $f(\lambda, \theta)$ est la fonction dite de Green valant 1 sur les continents et 0 sur les océans.

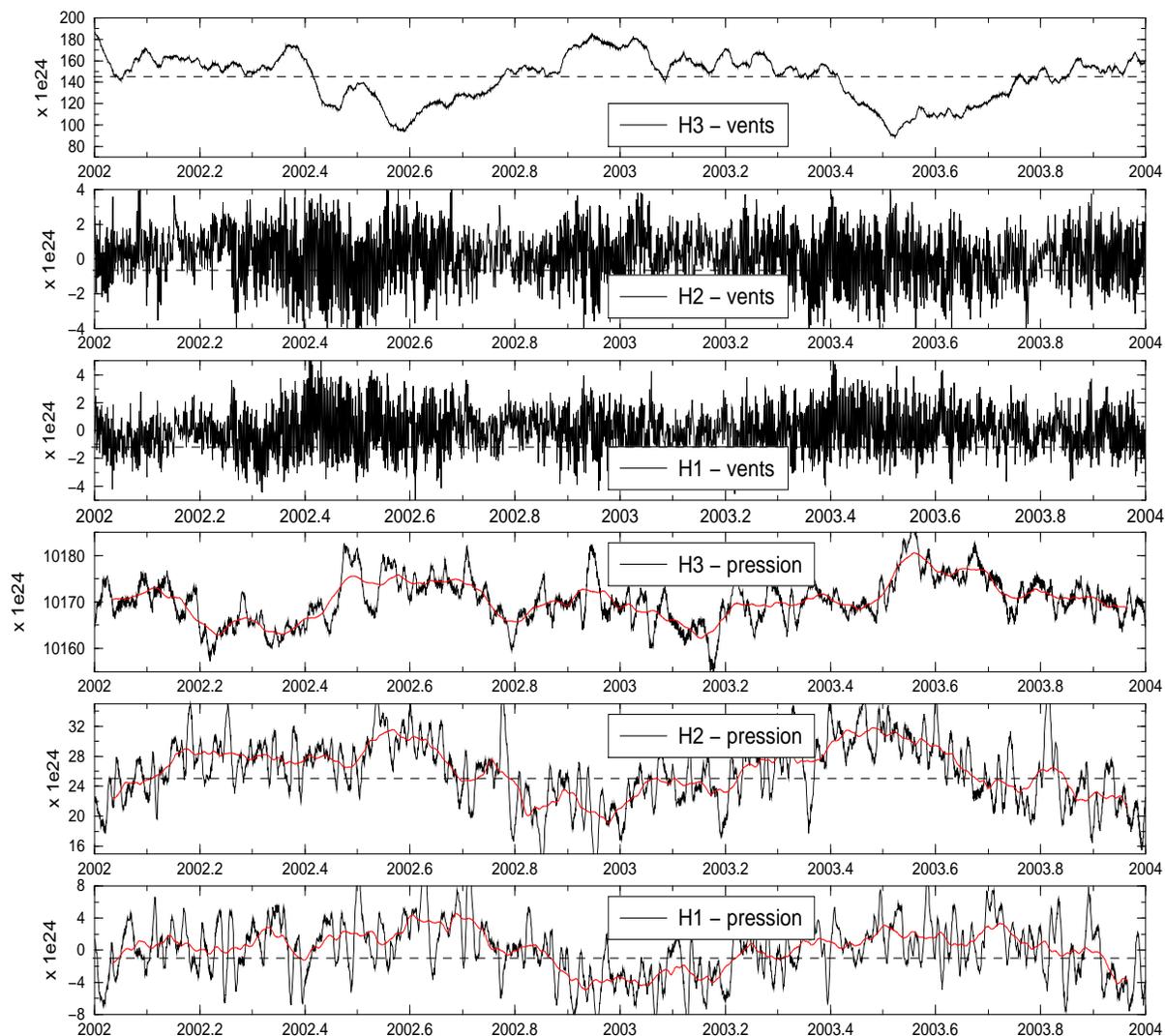


FIG. 5.4 – Termes de pression et de vent du moment cinétique atmosphérique de 2002 à 2004 en $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ fourni à 0h, 6h, 12h, 18h par le NCEP/NCAR (USA). L'effet saisonnier prédomine sauf pour les composantes équatoriales du terme vent régulées essentiellement par le cycle thermique diurne.

Pour des échelles de temps plus courtes, et notamment la bande diurne (dont la partie rétrograde jouera pour la nutation), la réaction de l'océan à l'excitation atmosphérique reste inconnue. On peut faire l'hypothèse radicalement opposée, à savoir que les océans et l'atmosphère sont découplés pour ces fréquences. En l'occurrence, l'océan ne réagit pas aux variations de pression atmosphérique et ces variations sont transmises intégralement au plancher océanique et donc à la Terre solide. C'est l'hypothèse dite du baromètre non-inversé (en anglais, Non-Inverted Barometer, NIB).

Dans la pratique chaque série temporelle de moment cinétique atmosphérique est donnée dans une version IB et une version NIB.

5.6.2 Modèle d'océan dynamique

Cependant on peut traiter l'influence des océans de manière plus réaliste en considérant les équations locales qui le régissent (Navier-Stokes, conservation de la masse, etc..). On aboutit alors à un modèle de circulation océanique, contraint par les observations océanographiques, qui permet de calculer courants, variations de hauteur d'eau en chaque point d'une maille le couvrant. D'où l'on évalue des séries temporelles du moment cinétique océanique.

Le terme matière est alors conditionné par la pression sur le plancher océanique P_O . On a donc une expression strictement identique à (5.25), pourvu d'y remplacer la pression continentale par P_O , P_O s'annulant sur les continents. Si le fluide est incompressible, sa densité ρ_e (1000 kg/m³) est uniforme. En un point du plancher océanique, de profondeur $h_P(\lambda, \theta)$ ($h_P \geq 0$), la pression s'exprime par $P_O = \rho_e g h$, si bien que le terme matière du moment cinétique océanique s'écrit :

$$[H^O] = -R_e^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (1 - f(\lambda, \theta)) \rho_w h(\lambda, \theta) \sin^2 \theta \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta d\lambda \quad (5.29)$$

Le terme des courants océaniques, de vitesses \vec{v} , s'écrit de manière analogue au terme de vent (5.26) :

$$[h^O] = R_e^3 \rho_e \int_{h=0}^{h_P} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin \theta \begin{pmatrix} v_\theta \sin \lambda + v_\lambda \cos \theta \cos \lambda \\ -v_\theta \cos \lambda + v_\lambda \cos \theta \sin \lambda \\ -v_\lambda \sin \theta \end{pmatrix} dh d\theta d\lambda \quad (5.30)$$

5.6.3 Ordre de grandeur du terme zonal du moment cinétique océanique

Les océans représente l'équivalent d'une coquille de 2500 m d'épaisseur couvrant toute la surface terrestre. On en tire la masse océanique : $M_O \approx 1,3 \cdot 10^{21}$ kg. C'est environ 250 fois la masse de l'atmosphère.

A contrario la vitesse moyenne des courants est de l'ordre de $v_O = 1$ cm/s, au lieu de $v_A = 10$ m/s pour les vents. Les courants zonaux ne se développent pas sur toute la surface des océans, mais seulement dans l'hémisphère sud où les continents ne font pas

obstacles à ces courants (dans la bande de latitude 35°-70° Sud, soit 20% de la surface terrestre au plus.

Le moment cinétique relatif axial qui en résulte vaut au plus $M_O/M_A v_O/v_A 0.2 = 5\%$ de celui d'origine atmosphérique (soit environ $5 \cdot 10^{24} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$). De la part des océans, il n'y a donc pas lieu de s'attendre à un effet important dans la longueur du jour.

5.6.4 Séries d'excitation océanique

Les séries de moment cinétique océanique sont peu nombreuses. Dans ce qui suit nous considérons celle de Ponte et al. (1998) qui couvre la période 1985-1996 avec un pas de 5 jours et a été estimée au moyen d'un modèle de circulation océanique contraint par les données atmosphériques du projet de réanalyse globale du NCEP/NCAR. Il n'y a pas d'assimilation de données océaniques, c'est à dire qu'aucune observation ne vient contraindre le modèle de circulation (à la différence des modèles atmosphériques qui, eux, sont contraints par des grilles d'observations). Les moments cinétiques (pression et courants) sont représentés sur la Fig. 5.5 de 1993 à 1995. La variation saisonnière dans le terme de pression comme dans le terme vent est de l'ordre de $0,3 \cdot 10^{24} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$, soit 10 fois moins que dans le moment cinétique atmosphérique.

5.7 Bilan des effets atmosphériques et océaniques sur l'orientation de la Terre

5.7.1 Effets sur le mouvement du pôle

Nous nous intéressons aux fluctuations au moins supérieures à 10 jours. Dans ce domaine les dérivées temporelles des fonctions de moment cinétique peuvent être négligées, et l'équation du mouvement du pôle (5.16) s'écrit :

$$m + \frac{i}{\sigma_c^*} \dot{m} = \chi^{mat\ eff} + \chi^{mv\ eff} = \chi^{eff} \quad (5.31)$$

Le membre de gauche de cette équation constitue l'excitation équatoriale totale que l'on peut déduire des observations géodésiques : c'est l'*excitation géodésique* :

$$\chi_G = m + \frac{i}{\sigma_c^*} \dot{m} \quad (5.32)$$

que l'on va comparer à l'excitation géophysique équatoriale, ou excitation des couches fluides χ_F (membre de droite) comprenant l'excitation atmosphérique χ_A et l'excitation océanique χ_O .

Le calcul de l'excitation géophysique dans le domaine du temps à partir de données discrètes repose sur une manipulation numérique (dérivée temporelle) et sur le choix d'une valeur de la fréquence de Chandler σ_c^* . C'est celle d'un oscillateur amorti et s'écrit sous forme complexe (voir paragraphe 4.7) :

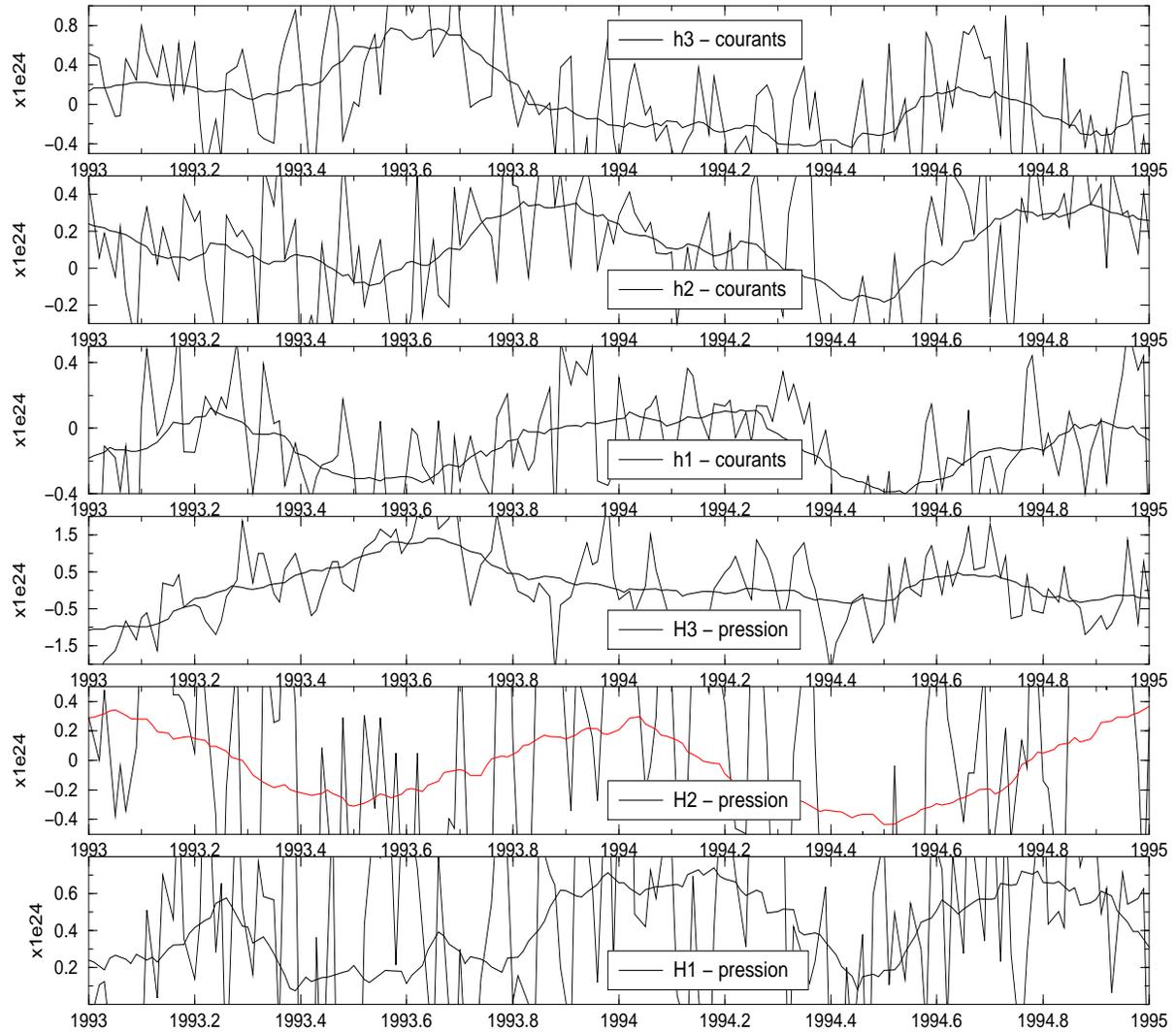


FIG. 5.5 – Termes de pression et de courant du moment cinétique océanique de 1993 à 1995 en $kg\ m^2\ s^{-1}$ fourni tous les 5 jours par Ponte et al.(1998)

$$\sigma_c^* = \sigma_c(1 + i/2Q) \quad (5.33)$$

Les valeurs de σ_c et Q varient d'une étude à l'autre. La période de Chandler est 432 jours à 1 jour près, et son facteur de qualité oscille entre $Q = 50$ et $Q = 180$. Nous avons adopté la valeur élevée $Q = 179$ correspondant à l'estimation de Wilson et Vicente (1990). Nous avons pris une fréquence de Chandler de 0.8435 cpa (cycle par an), soit une période de 433 jours.

Nous avons dérivé l'excitation géodésique à partir des données de mouvement du pôle de l'IERS (série combinée journalière IERS C04). L'excitation atmosphérique utilisée dans l'étude est celle du NCEP/NCAR, déjà décrite plus haut. Nous utilisons l'approximation dite du baromètre inverse (IB). La série de moment cinétique océanique, convertie en fonction d'excitation, est celle de Ponte et al. (1998) couvrant la période 1985.0-1996.3.

L'échantillonnage des séries d'excitation géodésique et atmosphérique a été calqué sur celui de la série océanique. Le filtrage et l'interpolation nécessaires à cette opération ont été réalisés par application d'un filtre gaussien de période de demi-coupure de 10 jours, éliminant les hautes fréquences, et interpolation par polynômes de Lagrange d'ordre 4. Les séries obtenues sont tracées avec leur spectre de Fourier sur les figures 5.6 (χ_G), 5.7 (χ_A) et 5.8 (χ_O). La figure 5.9 montre la combinaison de l'excitation atmosphérique avec l'excitation océanique. On note que les pics saisonniers sont beaucoup plus marqués dans les excitations fluides que dans l'excitation observée.

Les comparaisons dans le domaine du temps entre l'excitation géodésique et celle des couches fluides sont représentées sur la figure 5.10, après avoir retiré une tendance à chacune des séries par filtrage gaussien avec une période de demi-coupure de 600 jours.

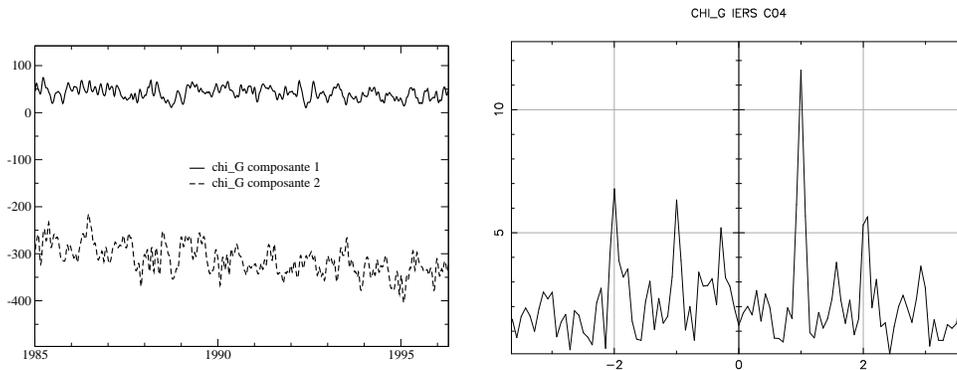


FIG. 5.6 – Excitation géodésique équatoriale (χ_G , IERS C04) en mas entre 1985.0 et 1996.3. Les amplitudes du spectre sont en mas et les fréquences en cycles par an (cpa).

Les coefficients de corrélation entre les séries d'excitation géodésique et géophysiques sont calculés selon la formule générale, pour deux séries temporelles X et Y :

$$C(X, Y) = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_{XX}\sigma_{YY}} \quad (5.34)$$

où la covariance σ^2 est :

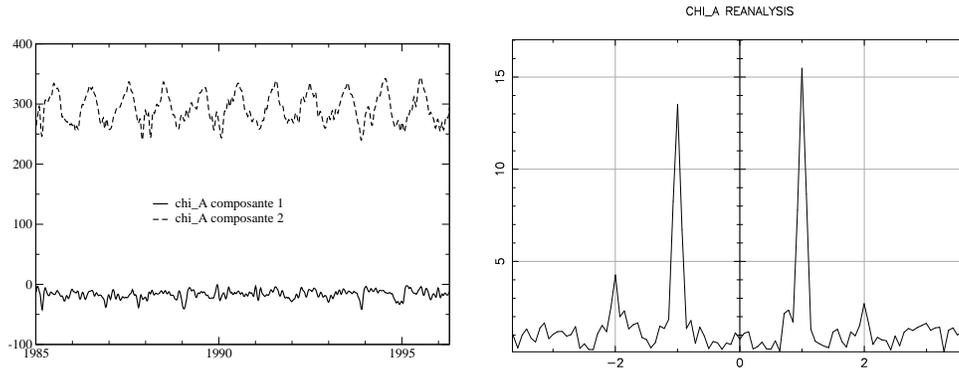


FIG. 5.7 – Excitation atmosphérique équatoriale (χ_A , NCEP/NCAR Reanalysis project) en mas entre 1985.0 et 1996.3. Les amplitudes du spectre sont en mas et les fréquences en cycles par an (cpa).

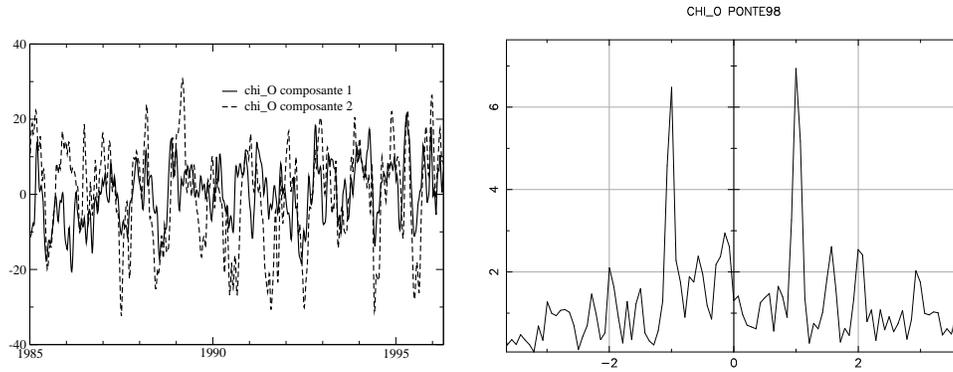


FIG. 5.8 – Excitation océanique équatoriale (χ_O , Ponte et al. 1998) en mas entre 1985.0 et 1996.3. Les amplitudes du spectre sont en mas et les fréquences en cycles par an (cpa).

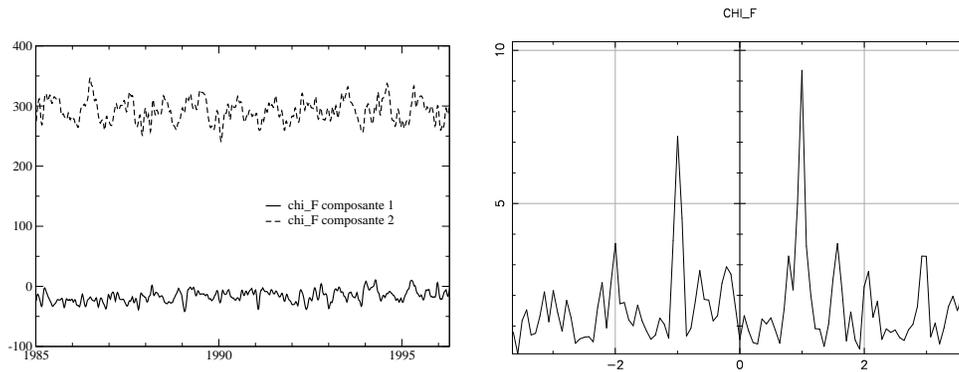


FIG. 5.9 – Excitation totale atmosphérique + océanique équatoriale (χ_F) en mas entre 1985.0 et 1996.3. Les amplitudes du spectre sont en mas et les fréquences en cycles par an (cpa).

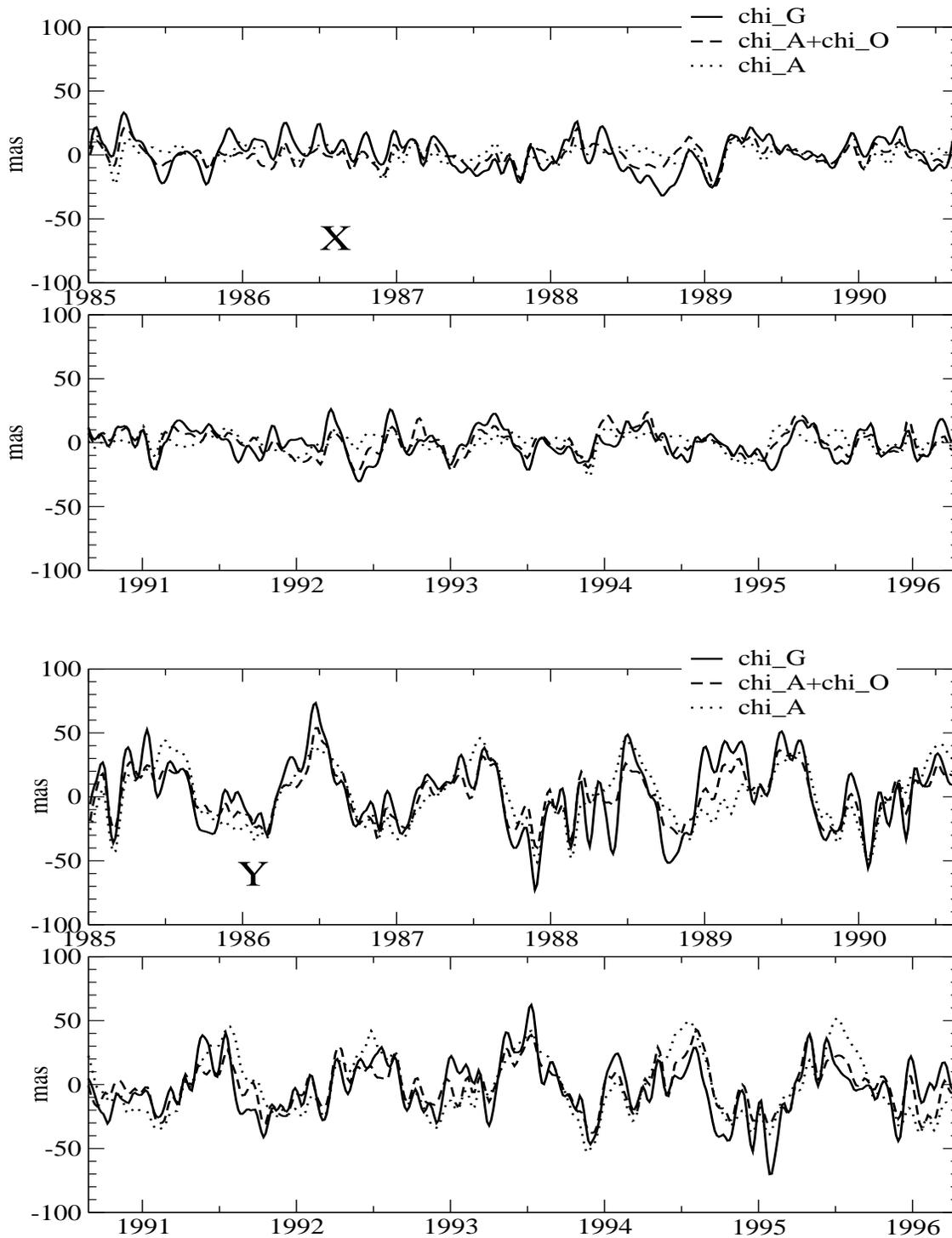


FIG. 5.10 – Comparaison dans le domaine du temps des séries d'excitation géodésique, atmosphérique + océanique et atmosphérique seule pour la composante x (en haut) et y (en bas).

TAB. 5.1 – Coefficients de corrélation entre l'excitation géodésique et les excitations atmosphérique (NCEP/NCAR) et océanique.

| | 1985.0-1996.3 | |
|---|--------------------|--------------------|
| | (χ_G, χ_A) | (χ_G, χ_F) |
| X | 0.29 | 0.55 |
| Y | 0.49 | 0.68 |

$$\sigma_{XY}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \quad (5.35)$$

\bar{X} et \bar{Y} désignant les valeurs moyennes de séries X et Y . Les corrélations de 1985 à 1996.3 sont reportés dans la table 5.1. On note une amélioration importante de la corrélation qui franchit ainsi la barre des 0.5 si l'on ajoute les effets océaniques. L'effet est spectaculaire sur la composante x pour laquelle l'amélioration est près de 90%. Elle est de 39% pour la composante y .

Pour quantifier l'effet moyen, sur un intervalle de temps donné, de l'atmosphère ou de l'océan sur le mouvement du pôle, nous avons estimé par moindres carrés les amplitudes des termes principaux dans les fonctions d'excitation : annuels, semi-annuels et ter-annuels, progrades et rétrogrades. Le modèle que nous ajustons sur les fonctions d'excitation χ complexes comporte aussi une pente at et un biais b :

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_1 + i\chi_2 \\ &= \sum_j C_j e^{i\omega_j(t-t_0)} + at + b \\ &= \sum_j A_j e^{i(\omega_j(t-t_0)+\phi_j)} + at + b \end{aligned} \quad (5.36)$$

où C_j est l'amplitude complexe pour le terme de fréquence ω_j . La donnée de C_j est équivalente à la donnée d'une amplitude réelle A_j et d'une phase ϕ_j rapportée à une date fixe. En pratique, le terme périodique j s'écrit :

$$\begin{aligned} \chi_1 &= A^{(ip)} \cos(\omega t) - A^{(op)} \sin(\omega t) \\ \chi_2 &= A^{(ip)} \sin(\omega t) + A^{(op)} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (5.37)$$

où les amplitudes A sont toutes réelles et les exposants (ip) sont mis pour "in-phase," désignant le terme en phase (ici, le terme en cosinus de la première composante) et (op) sont mis pour "out-of-phase," terme hors-phase² (ici, le terme en sinus de la première composante). Les estimations, effectuées sur la période 1985.0-1996.3, sont reportées dans

²ou plus exactement en quadrature de phase.

TAB. 5.2 – Estimations des termes annuels, semi-annuels et ter-annuels dans les fonctions d’excitation géodésique, atmosphérique et océanique : amplitudes en mas et phases rapportées à l’époque J2000.0. Période 1985.0-1996.3, série atmosphérique NCEP/NCAR, série océanique de Ponte et al. (1998).

| | | | χ_G | χ_A | | χ_O | | χ_F |
|-----|-------|---------|----------|----------|------|----------|-------|----------|
| cpa | | mas | | mas | | mas | | mas |
| +1 | 13.22 | -65.60° | 16.47 | 265.77° | 6.89 | 60.97° | 10.62 | -78.45° |
| -1 | 6.95 | 236.61° | 14.43 | 260.62° | 6.78 | 88.69° | 7.78 | 253.58° |
| +2 | 5.39 | 96.28° | 2.99 | 49.40° | 2.55 | 178.79° | 2.40 | 104.46° |
| -2 | 6.37 | 127.21° | 4.63 | 110.42° | 2.36 | 240.75° | 3.59 | 140.53° |
| +3 | 2.81 | 107.15° | 1.56 | 145.20° | 1.57 | 108.90° | 2.97 | 127.00° |
| -3 | 3.09 | -26.44° | 1.53 | 6.95° | 1.36 | -39.05° | 2.66 | -14.65° |

la table 5.2. Une représentation graphique sous forme de vecteurs dans le plan complexe (Fig. 5.11) permet d’apprécier le bilan de moment cinétique du système Terre solide + atmosphère + océans.

Les valeurs obtenues ne reflètent pas la position terrestre du pôle de rotation. Celle-ci peut être déterminée en inversant l’équation (5.31) dans le domaine des fréquences :

$$m(\sigma) \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_c^*} \right) = \chi^{eff}(\sigma) \quad (5.38)$$

Dans la table 5.3 nous reportons les effets saisonniers atmosphérique et océanique sur le mouvement du pôle de rotation et les variations observées. Nous constatons que l’ajout des océans rend mieux compte du cycle saisonnier.

5.7.2 Effets sur la longueur du jour

Les variations de la longueur du jour sont déduites de l’équation (5.24) :

$$\frac{\Delta LOD}{LOD} = \chi_3^{mat\,eff} + \chi_3^{mv\,eff}$$

Pour comparer l’excitation géophysique aux fluctuations observées de la longueur du jour, il faut préalablement retirer de celles-ci les effets étrangers aux excitations des fluides superficiels.

D’une part nous savons que sous l’action des marées zonales (dépendance en latitude seule), le moment d’inertie axial de la Terre solide varie, et induit des variations très bien modélisées de la longueur du jour, de l’ordre de 0.5 ms. Cet effet de marée zonales est illustré sur la Figure 5.13.

D’autre part, probablement à cause de l’interaction entre le noyau et le manteau, la longueur du jour fluctue de 5 ms environ avec des périodes caractéristique de 13, 30 et 70

ANNUEL PROGRADE 1985–1996

ANNUEL RETROGRADE 1985–1996

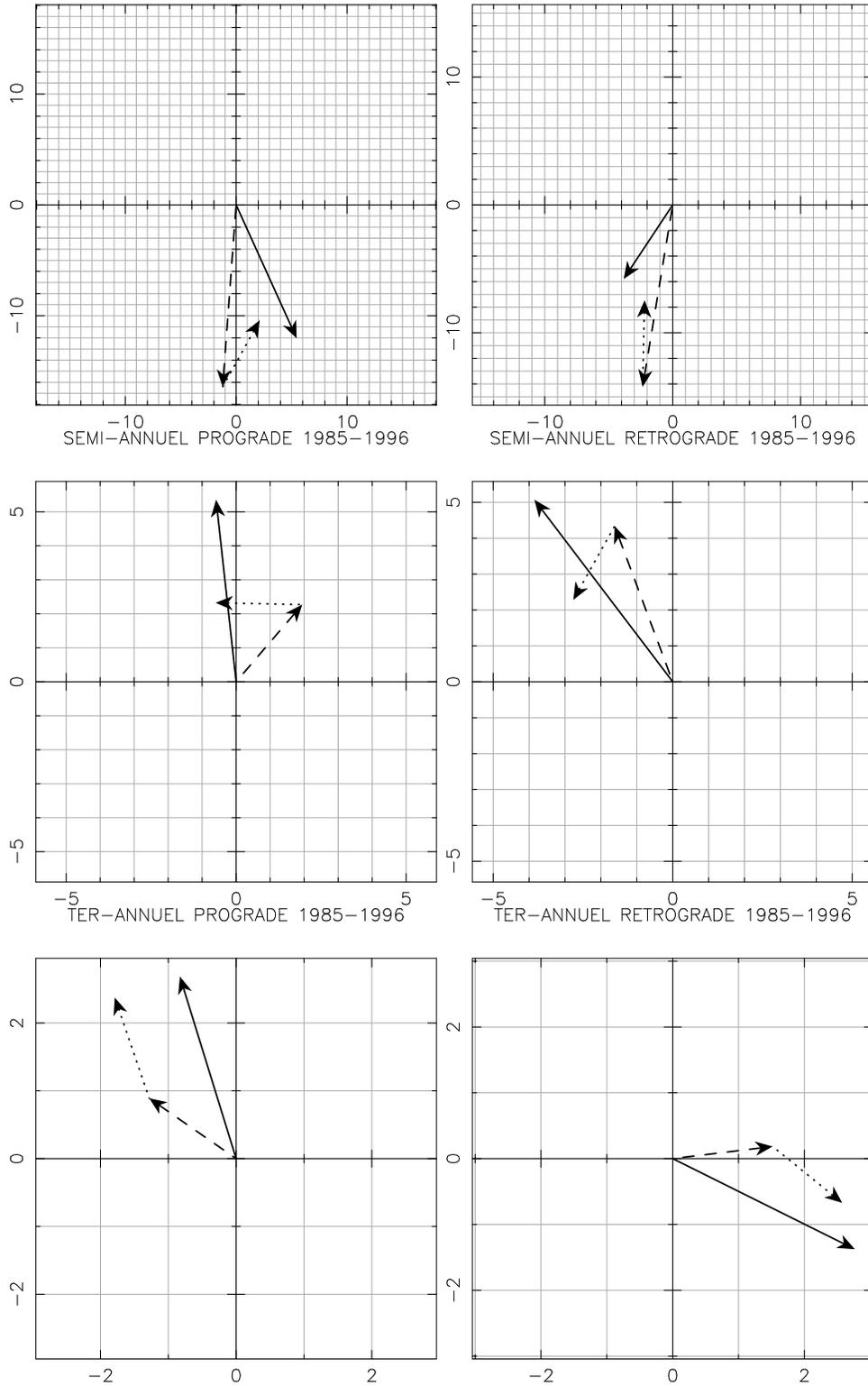


FIG. 5.11 – Bilan de moment cinétique entre 1985.0 et 1996.3 sous forme de vecteurs dans le plan complexe. Trait plein : χ_G , semi-plein : χ_A , pointillés : χ_O (Ponte et al. 1998).

TAB. 5.3 – Estimations des termes annuels, semi-annuels et ter-annuels dans le mouvement du pôle : amplitudes en mas et phases rapportées à l'époque J2000.0. Période 1985.0-1996.3, série atmosphérique NCEP/NCAR, série océanique de Ponte et al. (1998).

| cpa | p_G | | p_A | | p_O | | p_F | |
|-----|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|
| | mas | mas | mas | mas | mas | mas | mas | mas |
| +1 | 71.26 | 115.42° | 88.78 | 86.79° | 37.14 | 241.99° | 57.25 | 102.57° |
| -1 | 3.18 | 236.70° | 6.60 | 260.71° | 3.10 | 88.78° | 3.56 | 253.67° |
| +2 | 3.93 | -83.44° | 2.18 | 229.68° | 1.86 | -0.93° | 1.75 | -75.26° |
| -2 | 1.89 | 127.32° | 1.37 | 110.53° | 0.70 | 240.86° | 1.07 | 140.64° |
| +3 | 1.10 | -72.63° | 0.61 | -34.58° | 0.61 | -70.88° | 1.16 | -52.78° |
| -3 | 0.68 | -26.32° | 0.34 | 7.08° | 0.30 | -38.93° | 0.58 | -14.44° |

TAB. 5.4 – Estimations des termes annuels, semi-annuels et ter-annuels dans l'excès de la durée du jour (LOD), l'effet des marées zonales et la tendance ayant été préalablement retirées) et l'excitation atmosphérique depuis 1962.0 : amplitudes en ms et phases rapportées à l'époque J2000.0.

| cpa | ΔLOD | | $\chi_3 \times \overline{LOD}$ | |
|-----|--------------|---------|--------------------------------|---------|
| | ms | ms | ms | ms |
| 1 | 0.34 | -30.99° | 0.35 | -34.26° |
| 2 | 0.29 | 117.71° | 0.24 | 110.78° |
| 3 | 0.04 | -32.24° | 0.04 | -37.79° |

ans. C'est d'ailleurs l'irrégularité principale, figurée dans le Chapitre 2 (Fig. 2.3) et dont l'impact sur quelques années apparaît sur la Figure 5.14 (graphique à droite).

En retirant de la longueur du jour l'effet prédictible de la marée zonale et en éliminant les termes décennaux par filtrage, nous pouvons comparer la fonction d'excitation atmosphérique χ_3 et les variations du LOD résiduelles qui sont imputées à l'atmosphère (Fig. 5.12). Nous faisons cette comparaison sur la totalité des données disponibles pour la série IERS C04, c'est à dire depuis 1962.0. Le coefficient de corrélation entre les deux séries est très élevé, 0.93, ce qui indique que l'atmosphère est presque entièrement responsable des fluctuations du LOD, hormis les effets prédictibles des marées zonales et les fluctuations décennales. En utilisant une méthode d'estimation par moindres carrés similaire à celle utilisée pour l'étude des termes saisonniers du mouvement du pôle (ici, notre modèle est sous la forme $A \cos(\sigma t + \phi)$), nous avons estimé les amplitudes des termes saisonniers dans l'excitation atmosphérique et géodésique. Les valeurs sont reportées dans la table 5.4. Les différences inexplicables ne dépassent pas 0.05 ms.

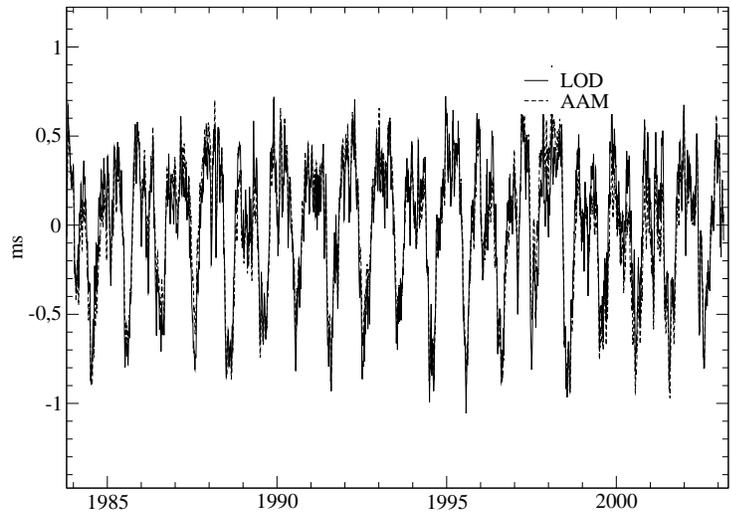


FIG. 5.12 – Comparaison entre les variations du LOD (effet des marées zonales et tendance retirées) et la fonction d’excitation atmosphérique axiale depuis 1984.0. L’accord est presque parfait.

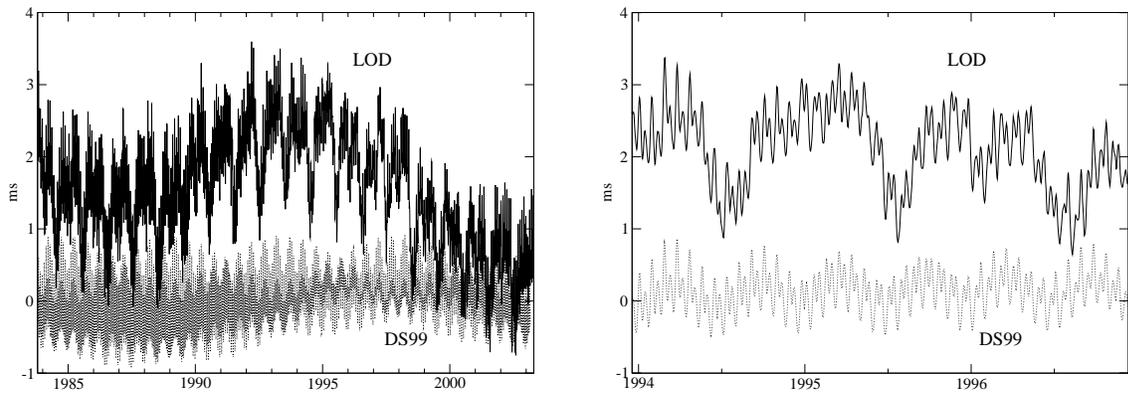


FIG. 5.13 – Variation de la durée du jour (série IERS C04) et effet des marées zonales à partir du modèle de Defraigne et Smits 1999 (DS99). A droite, zoom sur les variations saisonnières.

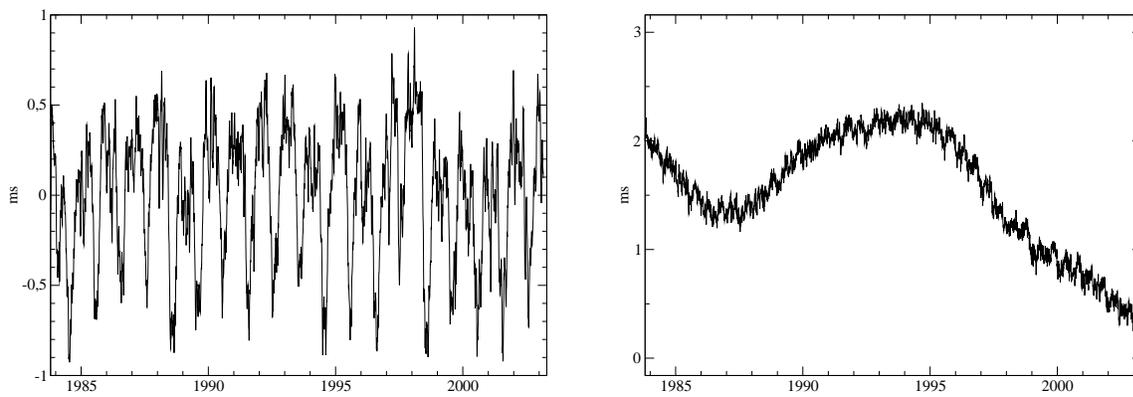


FIG. 5.14 – A gauche, variation de l'excitation atmosphérique axiale (NCEP/NCAR Reanalysis), l'effet séculaire (terme constant et linéaire) ayant été retiré. A droite, variation de la durée du jour (série IERS C04) résiduelle après avoir retiré les marées zonales (modèle de Defraigne et Smits 1999) et l'excitation atmosphérique : la tendance décennale demeure

Annexe A

Décomposition du géopotential en harmonique sphérique - liens avec les moments d'inertie

A.1 Formulaire

L'accélération gravitationnelle terrestre \vec{g} dérive du potentiel gravitationnel U :

$$\nabla U = \vec{g} \quad (\text{A.1})$$

On démontre que ce dernier est décomposable en une somme d'harmoniques sphériques :

$$U(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \phi) \quad (\text{A.2})$$

où r est la distance géocentrique, ϕ la latitude et λ la longitude du point auquel on détermine le potentiel ; G est la constante gravitationnelle, R_e le rayon équatorial moyen terrestre et M la masse de la Terre ; C_{nm} et S_{nm} sont les coefficients de Stokes, définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C_{nm} &= \frac{1}{MR_e^n} (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_M r^n P_{nm}(\sin \phi) \cos(m\lambda) dM \\ S_{nm} &= \frac{1}{MR_e^n} (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_M r^n P_{nm}(\sin \phi) \sin(m\lambda) dM \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où (r, ϕ, λ) sont les coordonnées de l'élément dM et les $P_{nm}(\sin \phi)$ sont les *fonctions de Legendre de première espèce* (voir Table A.1) :

$$P_{nm}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dt^m} \quad (\text{A.4})$$

où les $P_n(x)$ sont les *polynômes de Legendre* :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (\text{A.5})$$

Notons que $P_n(x) = P_{n0}(x)$.

Comme les polynômes $P_{nm}(\sin \phi)$ augmentent très rapidement en valeur absolue avec le degré n , en pratique on préfère utiliser leur forme normalisée : $\bar{P}_{nm}(\sin \phi) = \beta_{nm}P_{nm}$ avec β_{nm} le coefficient de normalisation donné par (voir Table A.2) :

$$\beta_{nm}^2 = (2 - \delta_{0m})(2n + 1) \frac{(n - m)!}{(n + m)!} \quad (\text{A.6})$$

Les coefficients de Stokes sont alors normalisés selon :

$$\bar{C}_{nm} = 1/\beta_{nm}C_{nm} \quad \bar{S}_{nm} = 1/\beta_{nm}S_{nm} \quad (\text{A.7})$$

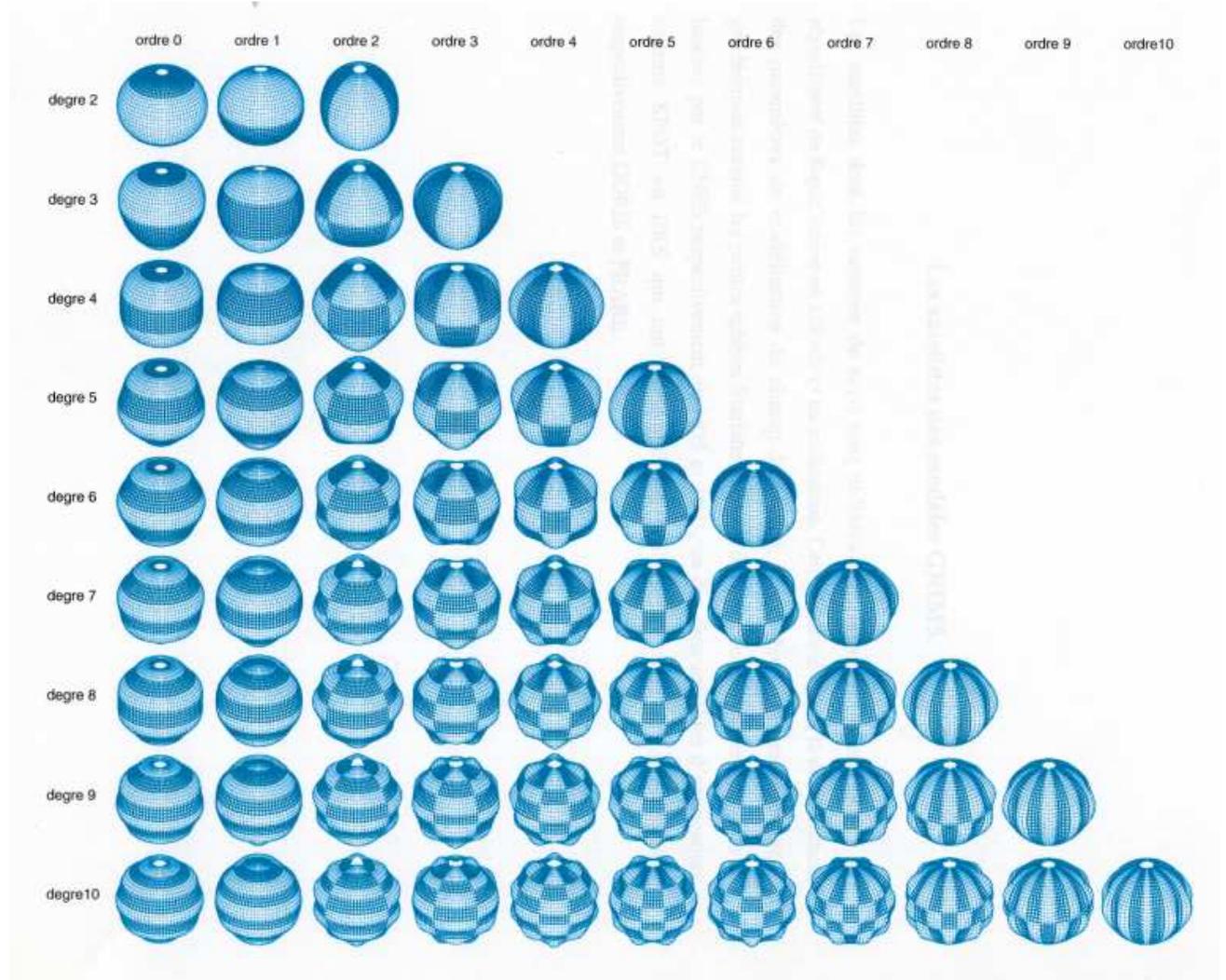


FIG. A.1 – Fonctions harmoniques sphériques (source GRGS).

On peut faire différentes remarques quant aux particularités de ces coefficients de Stokes :

- Si l'origine du repère considéré est prise au centre de masse de la Terre, on a : $C_{00} = 1$ et $C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0$ (voir paragraphe suivant).
- Lorsque $m = 0$, les C_{n0} sont appelés coefficients zonaux, aussi notés $-J_n$ et par définition : $S_{n0} = 0$.

TAB. A.1 – Fonctions de Legendre $P_{nm}(\sin \phi)$ de degré n et d'ordre m .

| Degré | $m = 0$ | $m = 1$ | $m = 2$ | $m = 3$ |
|---------|-----------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------|------------------|
| $n = 0$ | 1 | | | |
| $n = 1$ | $\sin \phi$ | $\cos \phi$ | | |
| $n = 2$ | $\frac{3 \sin^2 \phi - 1}{2}$ | $3 \sin \phi \cos \phi$ | $3 \cos^2 \phi$ | |
| $n = 3$ | $\frac{5 \sin^3 \phi - 3 \sin \phi}{2}$ | $\cos \phi \frac{15 \sin^2 \phi - 3}{2}$ | $15 \cos^2 \phi \sin \phi$ | $15 \cos^3 \phi$ |

TAB. A.2 – Coefficients de normalisation pour les coefficients de Stokes de degré 2 du potentiel gravitationnel terrestre : $C_{nm} = \beta_{nm} \bar{C}_{nm}$ et $S_{nm} = \beta_{nm} \bar{S}_{nm}$.

| Ordre m | β_{2m} |
|-----------|----------------------------------|
| 0 | $\sqrt{5}$ |
| 1 | $\sqrt{\frac{5}{3}}$ |
| 2 | $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}}$ |

- Lorsque $n = m$, les coefficients de Stokes sont dits sectoriaux.
- Lorsque $n > m$ et $m \geq 1$, C_{nm} et S_{nm} sont appelés coefficients tesséraux.

A.2 Démonstration abrégée

Tout élément de masse terrestre dm , de rayon vecteur r' , produit en un point S externe à la Terre - situé à la distance r du centre des masses et à la distance $\delta = |\vec{r} - \vec{r}'|$ de la masselote dm - la contribution :

$$dU = G \frac{m \, dm}{\delta}$$

sur le géopotential U (voir Fig. A.2). En notant \mathcal{V} le volume occupé par la Terre, le potentiel gravitationnel total est :

$$U(\vec{r}) = G \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{V}} \frac{dm}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = G \iiint_{\vec{r}' \in \mathcal{V}} \frac{dm}{\delta} \quad (\text{A.8})$$

On peut développer $\frac{1}{\delta}$ grâce aux polynômes de Legendre. Dans le triangle $O - (dm) - S$, on a :

$$\begin{aligned} \delta^2 &= r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \theta \\ \frac{1}{\delta} &= \frac{1}{r} \left(1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \theta + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

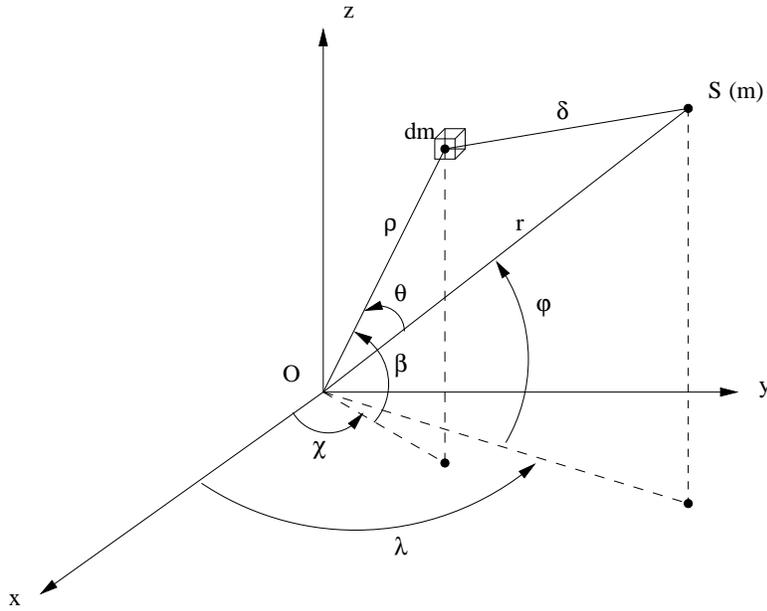


FIG. A.2 – Le géopotentiel régnant au point S résulte de l'action combinée de tous les éléments de masse dm .

La fonction $f\left(\frac{r'}{r}\right) = \left(1 - 2\frac{r'}{r}\cos\theta + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-1/2}$ est développable en série entière de $\frac{r'}{r}$ (et est convergente pour $r' \leq r$) par :

$$f\left(\frac{r'}{r}\right) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad (\text{A.10})$$

où θ est l'angle entre les vecteurs \vec{r}' et \vec{r} , et P_n sont les polynômes de Legendre tels que :

$$P_n(x) = \sum_{2k=0}^n (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n (n-k)! (n-2k)! k!} x^{n-2k} \quad (\text{A.11})$$

On peut montrer que ces derniers sont solution de l'équation de Legendre suivante (équation différentielle du deuxième ordre) :

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x \frac{dP_n}{dx} + n(n-1)P_n = 0 \quad (\text{A.12})$$

qui nous permet alors d'établir par récurrence, que :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] \quad (\text{A.13})$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{r} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad (\text{A.14})$$

En substituant l'expression précédente de $\frac{1}{\delta}$ dans l'équation (A.8), on a :

$$U(\vec{r}) = \frac{G}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r^n} \iiint_{\mathcal{V}} r'^n P_n(\cos \theta) dm \quad (\text{A.15})$$

On pose

$$U(\vec{r}) = U_0 + \sum_{n \geq 1} U_n \quad (\text{A.16})$$

avec

$$U_0 = \frac{GM_e}{r} \quad U_n = \frac{G}{r} \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \theta) dm \quad (\text{A.17})$$

En notant (r, λ, ϕ) les coordonnées sphériques de S , et (r', λ', ϕ') celles, variables, de la masse dm , nous avons :

$$\cos \theta = \sin \phi \sin \phi' + \cos \phi \cos \phi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (\text{A.18})$$

De cette formule, on déduit au moyen d'un calcul laborieux, l'expression suivante du polynôme de Legendre $P_n(\cos \theta)$:

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \phi) P_{nm}(\sin \phi') \cos(\lambda' - \lambda) \quad (\text{A.19})$$

où les P_{nm} sont les fonctions de Legendre définies par l'équation (A.4). On en déduit que, pour $n \geq 1$:

$$U_n = \frac{G}{r} \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{r'}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \phi) P_{nm}(\cos \phi') \cos(\lambda' - \lambda) dm \quad (\text{A.20})$$

soit

$$U_n = \frac{GM_e}{r} \left(\frac{R_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [C_{nm} \cos(\lambda) + S_{nm} \sin(\lambda)] P_{nm}(\sin \phi) \quad (\text{A.21})$$

avec

$$C_{nm} = \frac{1}{M_e R_e^n} (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{\mathcal{V}} r'^n P_{nm}(\sin \phi') \cos(\lambda') dm \quad (\text{A.22})$$

$$b_{nm} = \frac{1}{M_e R_e^n} (2 - \delta_{m0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{\mathcal{V}} r'^n P_{nm}(\sin \phi') \sin(\lambda') dm \quad (\text{A.23})$$

A.3 Liens avec les moments d'inertie de la Terre

Dans le repère terrestre (Oxyz) la matrice d'inertie terrestre admet une expression quasi-diagonale :

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & B + c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & C + c_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

où (A, B, C) sont les moments principaux d'inertie moyens, constants dans le temps. Les incréments d'inertie c_{ij} pour $i, j = 1, 2, 3$ proviennent à la fois des redistributions de

masses (partie variable) et du désalignement des axes du repère terrestre avec les axes principaux d'inertie. Pour un corps assimilé à un ellipsoïde de révolution, on considère que : $A = B$. Chacun des coefficients d'inertie est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int (y^2 + z^2) dM & I_{12} &= - \int xy dm \\
I_{22} &= \int (x^2 + z^2) dM & I_{23} &= - \int yz dm \\
I_{33} &= \int (x^2 + y^2) dM & I_{13} &= - \int xz dm
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Par ailleurs les coefficients de Stokes de degré deux du géopotentiel, qui se déduisent des expressions (A.22) et (A.23) , sont :

$$\begin{aligned}
C_{20} &= \frac{1}{2 M_e R_e^2} \int r^2 (3 \sin^2 \phi - 1) dm \\
&= \frac{1}{2 M_e R_e^2} \int (3(r \sin \phi)^2 - r^2) dm \\
&= \frac{1}{2 M_e R_e^2} \int (3z^2 - r^2) dm \\
&= \frac{1}{2 M_e R_e^2} \int (2z^2 - x^2 - y^2) dm \\
&= \frac{1}{2 M_e R_e^2} [-I_{33} + (I_{11} + I_{22} - I_{33})] \\
&= \frac{1}{M_e R_e^2} \left[-I_{33} + \frac{I_{11} + I_{22}}{2} \right]
\end{aligned} \tag{A.26}$$

$$= \frac{C - A}{M_e R_e^2} \text{ pour une Terre biaxiale} \tag{A.27}$$

$$C_{21} = \frac{1}{M_e R_e^2} \int r^2 \sin \phi \cos \phi \cos \lambda dm \tag{A.28}$$

$$= \frac{1}{M_e R_e^2} \int (r \cos \phi \cos \lambda)(r \sin \phi) dm \tag{A.29}$$

$$= \frac{1}{M_e R_e^2} \int xz dm \tag{A.30}$$

$$= -\frac{I_{13}}{M_e R_e^2} \tag{A.31}$$

$$S_{21} = \frac{1}{M_e R_e^2} \int r^2 \sin \phi \cos \phi \sin \lambda dm \tag{A.32}$$

$$= \frac{1}{M_e R_e^2} \int (r \cos \phi \sin \lambda)(r \sin \phi) dm \tag{A.33}$$

$$= \frac{1}{M_e R_e^2} \int yz dm \tag{A.34}$$

$$= -\frac{I_{23}}{M_e R_e^2} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}
C_{22} &= \frac{1}{4 M_e R_e^2} \int r^2 \cos^2 \phi \cos(2\lambda) \, dm \\
&= \frac{1}{4 M R_e^2} \int (r \cos \phi)^2 (\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda) \, dM \\
&= \frac{1}{4 M R_e^2} \int [(r \cos \phi \cos \lambda)^2 - (r \cos \phi \sin \lambda)^2] \\
&= \frac{1}{4 M R_e^2} \int (x^2 - y^2) \, dM \\
&= \frac{I_{22} - I_{11}}{4 M R_e^2} \tag{A.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{22} &= \frac{1}{4 M R_e^2} \int r^2 \cos^2 \phi \sin(2\lambda) \, dM \\
&= \frac{1}{4 M R_e^2} \int (r \cos \phi)^2 (2 \sin \lambda \cos \lambda) \, dM \\
&= \frac{1}{2 M R_e^2} \int (r \cos \phi \cos \lambda)(r \cos \phi \sin \lambda) \, dM \\
&= \frac{1}{2 M R_e^2} \int xy \, dM \\
&= -\frac{I_{12}}{2 M R_e^2} \tag{A.37}
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc exprimer les coefficients de la matrice d'inertie en fonction des coefficients harmoniques sphériques de degré 2 du géopotentiel :

$$\begin{aligned}
I_{12} &= -2 M R_e^2 S_{22} && \text{(voir Eq. (A.37))} && \text{(A.38)} \\
&= -\sqrt{\frac{5}{3}} M R_e^2 \bar{S}_{22} && \text{(voir Table A.2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{13} &= -M R_e^2 C_{21} && \text{voir Eq. (A.31)} && \text{(A.39)} \\
&= -\sqrt{\frac{5}{3}} M R_e^2 \bar{C}_{21} && \text{(voir Table A.2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{23} &= -M R_e^2 S_{21} && \text{voir Eq. (A.35)} && \text{(A.40)} \\
&= -\sqrt{\frac{5}{3}} M R_e^2 \bar{S}_{21} && \text{(voir Table A.2)}
\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
I_{22} - I_{11} &= 4 M R_e^2 C_{22} && \text{(1)} && \text{voir Eq.(A.36)} \\
I_{33} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2} &= -M R_e^2 C_{20} && \text{(2)} && \text{voir Eq.(A.26)} \\
I_{11} + I_{22} + I_{33} &= Tr(I) && \text{(3)}
\end{aligned}$$

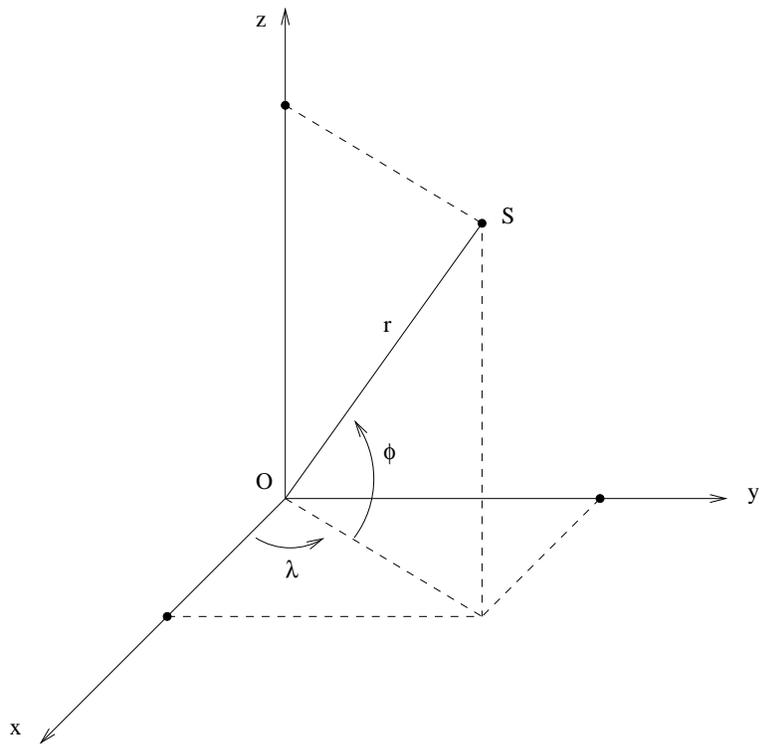


FIG. A.3 – Coordonnées sphériques du point S dans le repère (x,y,z). Ses coordonnées polaires sont alors : $x = r \cos \phi \cos \lambda$, $y = r \cos \phi \sin \lambda$, $z = r \sin \phi$, et donc $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Ce système d'équations équivaut à :

$$I_{11} = I_{22} - 4 M R_e^2 C_{22} \quad (1)$$

$$I_{33} = I_{22} - 2 M R_e^2 C_{22} - M R_e^2 C_{20} \quad (2)$$

$$2 I_{22} - 4 M R_e^2 C_{22} + I_{22} - 2 M R_e^2 C_{22} - M R_e^2 C_{20} = Tr(I) \quad (3)$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(I) - 2 M R_e^2 C_{22} + \frac{1}{3} M R_e^2 C_{20} & (1) \\
 &= \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(I) - \sqrt{\frac{5}{3}} M R_e^2 \bar{C}_{22} + \frac{\sqrt{5}}{3} M R_e^2 \bar{C}_{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{22} &= \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(I) + 2 M R_e^2 C_{22} + \frac{1}{3} M R_e^2 C_{20} & (3) \\
 &= \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(I) + \sqrt{\frac{5}{3}} M R_e^2 \bar{C}_{22} + \frac{\sqrt{5}}{3} M R_e^2 \bar{C}_{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{33} &= \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(I) - \frac{2}{3} M R_e^2 C_{20} & (2) \\
 &= \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(I) - \frac{2}{3} \sqrt{5} M R_e^2 \bar{C}_{20}
 \end{aligned}$$

Annexe B

Constantes usuelles

TAB. B.1 – Constantes utilisées dans cette étude.

| | notation | Valeur | Unit | incert. relat. $\times 10^{-6}$ | Source |
|------------------------------------------------------|-------------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------------|
| Moment principal d'inertie axial du manteau | C_m | $7,0400\ 10^{37}$ | kg m ² | | IAG 1999 |
| Moment principal d'inertie équatorial du manteau | A_m | $7,0165\ 10^{37}$ | kg m ² | | IAG 1999 |
| Moment principal d'inertie axial de la Terre | C | $8,0365\ 10^{37}$ | kg m ² | | IAG 1999 |
| Moment principal d'inertie équatorial de la Terre | A | $8,0101\ 10^{37}$ | kg m ² | | IAG 1999 |
| Longitude de l'axe d'inertie principal A | λ_A | $-14,9291 \pm 0,0010$ | ° | | IAG 1999 |
| Harmonique sphérique de degré 2 dans le géopotentiel | J_2 | $1.082635\ 9(1)\ 10^{-3}$ | | 0.09 | IAG 1999 $J_2 = -(A + B - 2C)/(2MR^2)$ |
| Rayon équatorial de la Terre | R_e | $6\ 378\ 136.6(1)$ | m | 0.015 | IAG 1999 |
| Nombres de Love de degré 2 | k_2 | 0,3 | | | IAG 1999 |
| Nombre de Love séculaire | k_0 | 0,9383 | | | IAG 1999 |
| Nombre de Love * de déformation de degré 2 | k'_2 | -0,3075 | | | IERS 2003 |
| Vitesse de rotation moyenne de la Terre | Ω | $7,292115\ 10^{-5}$ | rad s ⁻¹ | | IAG 1999 |
| Période de Chandler | T_0 | 433,1(1,7) | jours | 4000 | Vicente& Wilson 1997 |
| Fréquence de Chandler | f_C | 0,8433(30) | cycle par an | 4000 | id |
| Constante géocentrique de la gravitation | GM_e | $3.986\ 004\ 418(8)\ 10^{14}$ | m ³ s ⁻² | 0.002 | IAG1999 |

(*) Nombres de Love limités à leur partie réelle.

Bibliographie

- [1] Chandler S. DC., 1891, *Astronomical Journal*, **14**, 1758, 154-193.
- [2] Euler, 1758, *Mém. Acad. Sci. Berlin*, **14**, 154-193
- [3] Vicente, R.O., Wilson 1997, C.R., *J. Geophys. Res.*, Vol. **102**, B9, pp 20439-20446
- [4] de Viron O., Bizouard Ch., Salstein D. and Dehant V. : 1999, 'Atmospheric torque on the Earth and comparison with atmospheric angular momentum variations', *J. Geophys. Res.*, **104**, No. B3, 4861–4875.
- [5] Sidorenkov N.S., 2002, *Fizika nestabil'nostey vrashenia Zemli* (Physique des instabilités de la rotation terrestre), Ed. Fizmatlit, Moscou.